МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

"ТЕОРІЯ ІМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА"

Курс лекцій для студентів спеціальностей 6.160100 "Захист інформації з обмеженим доступом та автоматизація" та 6.090700 "Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси"

**Розглянуто на засіданні кафедри Радіотехніки та захисту інформації
Протокол № 10 від 28.05.2006**

**Затверджено на засіданні навчально-видавничої ради ДонНТУ
Протокол № 3 від 04.10.06**

2006

УДК 512.2
Б 85

Теорія імовірностей та математична статистика. Курс лекцій для студентів спеціальностей 6.160100 “Захист інформації з обмеженим доступом та автоматизація” та 6.090700 “Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси” / Укл. І.І. Босікова. – Донецьк-2006. – с.

Присвячується 85-річчю Донецького національного технічного університету.

Метою даного курсу лекцій є допомога студентам Донецького національного технічного університету спеціальностей РЕС та ТЗІ в самостійній роботі над курсом теорії імовірностей та математичної статистики.

Курс лекцій складений у відповідності до діючої на вказаних спеціальностях програми. Теоретичні відомості, що подаються в лекціях, ілюструються численними прикладами, які розкривають зміст означень, тверджень та висновків. При цьому наводяться приклади розв'язування задач як традиційних по теорії імовірностей так і з сфери засобів зв'язку, радіотехніки та радіовиробництва.

Читач, який хоче отримати більш повну інформацію, повинен звернутися до повних курсів ТІМС.

Предназначено для студентів спеціальностей 6.160100 “Захист інформації з обмеженим доступом та автоматизація” та 6.090700 “Радіоелектронні пристрої, системи та комплекси”

Укладач: Босікова Інна Іванівна, кандидат фіз.-мат. наук, доцент

Відповідальний за випуск: В.В.Пасльон, зав.кафедрою Радіотехніки та захисту інформації, кандидат технічних наук, доцент

Тема 1. Предмет та основні поняття теорії імовірностей

1. Класифікація подій.
2. Види випадкових подій.
3. Класичне означення імовірності.
4. Геометричне означення імовірності.
5. Відносна частота та її властивість стійкості.
6. Статистична імовірність.

1. Класифікація подій.

Усі процеси, що відбуваються у природі є наслідком взаємодії багатьох факторів. Для того, щоб керувати цими процесами треба дізнатися, яку роль в них відіграє кожен фактор окремо. Наприклад, зміна курсу деякої валюти. На неї впливають економічні та соціальні фактори, як внутрішні так і зовнішні.

Усі фактори, що впливають на процес потрібно подавати за допомогою кількісних оцінок. Щоб дістати потрібні числові дані, необхідно провести серію спостережень. Спостереження є найважливішою ланкою будь-якого дослідження.

Предмети, явища в природі пов'язані, залежать один від одного. Тому жоден предмет неможливо зрозуміти, якщо розглядати його ізольовано від інших, і, навпаки, будь-яке явище можна зрозуміти, якщо розглядати його в неперервному зв'язку з оточуючими явищами. Тому спостереження дає лише наслідок взаємодії основного фактора, який нас цікавить, з багатьма сторонніми. Усі фактори, якими під час експеременту нехтують, відбиваються на експеременті, надаючи їм неоднозначності.

В практичній діяльності часто зустрічаються явища, результат яких неможливо знати наперед, тому що він залежить від випадку. Прикл., місце, куди впаде снаряд – величина випадкова, вона є наслідком багатьох причин.

Математична наука, яка вивчає закономірності масових подій наз. *теорією імовірностей.*

Наука, що застосовує теорію імовірностей для обробки численних одиниць інформації як наслідків експеременту наз. *математичною статистикою.*

В будь-якій науці пізнання дійсності відбувається в результаті дослідження або спостереження. Під дослідженням в даному випадку мається на увазі набір деякого визначеного комплексу умов.

Будемо називати *випробуванням будь-який дослід, спостереження, дію, набір або комплекс умов.*

Можливий результат дослідження або спостереження будемо називати *подією* незалежно від його значення.

Всі події відносно їх появи можна поділити на три групи:
1) *достовірні (вірогідні)*
2) *неможливі*
3) *випадкові.*

Озн. *Достовірною (вірогідною)* називається подія, яка в результаті випробування обов'язково відбудеться.

Приклад.

1. Якщо в ящику містяться 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10, то поява кульки, навмання взятої з цієї урни, з номером в межах від 1 до 10, є подією достовірною.

2. Відмова радіоелемента (лампа, конденсатор і т.д.) при роботі на протязі нескінченно довгого часу є подією достовірною.

Озн. *Неможливою* наз.подія, яка в результаті випробування обов'язково не відбувається.

Приклад.

1. В ящику міститься 10 однакових кульок, пронумерованих від 1 до 10. Навмання беруть одну кульку. Поява кульки з номером 12 є подією неможливою.
2. В ящику містяться 20 стандартних радіодеталей. Навмання беруть одну радіодеталь. Поява бракованої радіодеталі є подією неможливою.

Озн. *Випадковою* наз. подія, яка в результаті випробування може як відбутися так і не відбутися.

Приклад.

1. Монету підкидають один раз. Поява герба — подія випадкова.
2. На дослідній ділянці в лабораторних умовах посіяно 100 зернин ячменю. Подія, яка полягає в тому, що пророste від 10 зернин, є випадковою.

2. Види випадкових подій.

Розглянемо деякі властивості випадкових подій.

Озн. *Несумісними* наз. дві події якщо поява однієї з них виключає появу іншої в заданому випробуванні.

Приклад.

1. Із ящика з радіодеталями навмання беруть одну радіодеталь. Події "з'явилася стандартна радіодеталь" і "з'явилася нестандартна радіодеталь" – несумісні.
2. Події "поява студента на лекції" і "відсутність студента на лекції" – несумісні .
3. Кинули монету. Події "випав герб" і "випав напис" – несумісні.
4. В кошику містяться білі і чорні кулі. Виймають одну кулю. Події "витягли білу кулю" і "витягли чорну кулю" – несумісні.

Озн. Події A_1, A_2, ..., A_n наз. *несумісними*, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися разом.

Приклад.

Кинули кубик. Події "випало 1 очко", "випало 2 очка", "випало 3 очка", "випало 4 очка", "випало 5 очок", "випало 6 очок" – несумісні.

Озн. *Сумісними* називаються дві події, якщо в результаті випробування поява однієї з них не заперечує можливость появи іншої в даному випробуванні.

Приклад.

1. Двоє спортсменів роблять по одному пострілу. Події "влучив перший" і "влучив другий" – сумісні.
2. Одночасно кидають монету і кубик. Події "випав герб" і "випало 2 очка" – сумісні.

Озн. *Рівноможливими* наз. дві події, якщо в заданному випробуванні вони мають однакову кількість шансів відбутися.

Прикл.

1. Кидають монету. Події "випав герб" і "випав напис" – рівноможливі.
2. "Народження хлопчика" і "народження дівчинки" – події рівноможливі.

Озн. *Рівноможливими* наз. події A_1, A_2, ..., A_n, якщо кожна з них має однакову кількість шансів відбутися або не відбутися в даному випробуванні.

Приклад.

Кинули кубик. Події "випало 1 очко", "випало 2 очка", "випало 3 очка", "випало 4 очка", "випало 5 очок", "випало 6 очок" – рівноможливі.

Озн. *Єдиноможливими,* наз. події A_1, A_2, ..., A_n, якщо в результаті випробування поява однієї з них і тільки однієї є подією достовірною.

Приклад.

Купують два квитка грошової лотареї. Обов'язково відбудеться одна із подій: "виграв перший білет і не виграв другий", "виграв другий білет і не виграв перший", "виграли обидва білети", "не виграв жоден білет". Отже, ці події – єдиноможливі.

3. Класичне означення ймовірності.

Теорія імовірностей досліджує моделі випадкових подій, а не самі події. Математичні моделі відбивають найістотніші властивості досліджуваних об'єктів. Для математичного опису випадкових подій застосовують такі точні поняття: *прості (елементарні)* та *складені випадкові події, простір елементарних подій.*

Озн. Подія, що відбувається внаслідок проведення однієї і тільки однієї спроби наз. *простою(елементарною) випадковою подією.*

Елементарні події позначаються ω_i (i = 1, 2, 3, ...) і в теорії імовірностей не поділяються на простіші складові.

Приклад.

1.Монету кидають один раз. Визначити елементарні події цього випробування.

Можливі наступні елементарні випадкові події:

ω_1 = г (монета випаде гербом),

ω_2 = ц (монета випаде цифрою).

2.Монету кидають три рази. Визначити елементарні події цього результату випробування.

Триразове підкидання монети – це одне випробування, елементарними випадковими подіями якого будуть:

ω_1 = ггг (тричі випаде герб),

ω_2 = ццц (тричі випаде цифра),

ω_3 = ггц (двічі випаде герб),

ω_4 = гцг (двічі випаде герб),

ω_5 = цгг (двічі випаде герб),

ω_6 = гцц (двічі випаде цифра),

ω_7 = цгц (двічі випаде цифра),

ω_8 = ццг (двічі випаде цифра).

Отже, даному випробуванню відповідають вісім елементарних подій (результатів)

Озн. Випадкову подію наз. *складеною,* якщо її можна розкласти на прості події.

Приклад.

Задано множину чисел від 1 до 12. Навмання беруть одне число. Побудувати випадкову подію “ з’явилося число кратне 2”.

Ця подія є складеною. Позначимо її A. Тоді $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$.

Елементарні випадкові події ω_i, які належать складеній випадковій події A наз. *елементарними подіями* (*результатами*), *які сприяють появі* події A.

Для кількісного вимірювання можливості появи події застосовується поняття імовірності. Отже, *імовірність* – це число, яке характеризує можливість появи події.

Приклад.

В ящику міститься 10 однакових кульок. Із них 3 червоні, 5 синіх, 2 білі. Можливість витягнути навмання із урни кольорову кульку більша, ніж можливість витягнути білу. Дати характеристику цієї можливості?

Подія A – поява кольорової кулі.

Є 10 елементарних результатів:

ω_1, ω_2, ω_3 – витягли червону кулю;

ω_4, ω_5, ω_6, ω_7, ω_8 – витягли синю кулю;

ω_9, ω_{10} – витягли білу кулю.

Всі ці події – рівноможливі і єдиноможливі.

Події A сприяють 8 елементарних результатів (від ω_1 до ω_8).

Відношення кількості результатів, що сприяють події A до загальної кількості результатів є імовірністю появи події A. В даному випадку – це 8/10.

Отримане число дає кількісну оцінку можливості появи кольорової кульки.

Класичне означення імовірності.

Озн. *Імовірністю події A* наз. відношення кількості елементарних результатів, які сприяють появі події A до загальної кількості рівноможливих і єдиноможливих результатів данного випробування.

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

де: m – кількість елементарних результатів, що сприяють появі події A,

n – загальна кількість рівноможливих і єдиноможливих результатів даного випробування.

Заув. Класичне означення імовірності можна використовувати тільки для рівноможливих та єдиноможливих результатів випробування.

Властивості імовірності:

1. ***Імовірність достовірної події дорівнює 1.***

Якщо подія достовірна, то кожен елементарний результат сприяє появі події. Отже, $m=n$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1.$$

2. ***Імовірність неможливої події дорівнює 0.***

Якщо подія неможлива, то жоден із елементарних результатів не сприяє її появі. Отже, $m=0$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0.$$

3. ***Імовірність випадкової події є додатнім числом, яке обмежене 0 і 1.***

Випадковій події сприяє лише частина із загальної кількості елементарних результатів випробування. В цьому випадку $0<m<n$, значить

$$0<m/n<1,$$

тобто

$$0<P(A)<1.$$

4. ***Імовірність будь-якої події задовільняє нерівність***

$$0\le P(A)\le 1.$$

Приклад.

1. Кидають два гральні кубики. Знайти імовірність того, що на них в сумі з'явиться 10 очок.

A – поява на двох кубиках в сумі 10 очок.

При киданні двох кубиків можливі 36 різних елементарних результатів (перша цифра – кількість очок на першому кубику, друга – на другому):

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

Ці результати є єдиноможливими, рівноможливими, несумісними. Шуканій події із 36 сприяє 3 результати, тому ймовірність події A буде дорівнювати

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{36}\approx 0{,}083.$$

2. Набираючи номер телефона, абонент забув одну цифру і набрав її навмання. Знайти імовірність того, що набрана цифра буде вірною.

A – набрана цифра вірна

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{10}\approx 0{,}1.$$

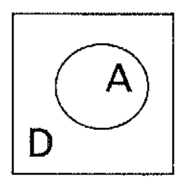
3. Набираючи номер телефона, абонент забув дві останні цифри. Він пам'ятає тільки те, що ці цифри різні. Знайти імовірність того, що дві навмання набрані цифри будуть вірні.

A – номер набрано вірно

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{1}{90}\approx 0{,}011.$$

4. Геометричне означення імовірності.

Нехай задана деяка фігура D така, що коли кидаємо точку, вона обов'язково попадає в фігуру D. Нехай ця точка попадає в будь-яку точку фігури D з однаковою можливістю. Нехай фігура D містить в собі фігуру A. Будемо говорити, що відбудеться подія A, якщо точка, яку кидаємо, попадає в фігуру A. Тоді імовірністю події A називається відношення площі фігури A до площі фігури D:

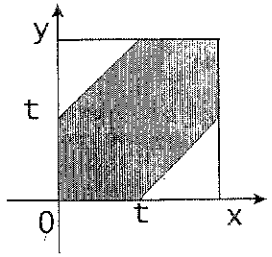


$$P(A)=\frac{S_A}{S_D}.$$

Приклад.

1. Двоє домовилися зустрітися на заданому проміжку часу L .Той, хто прийде першим, чекає на проміжку часу $t<L$. Яка імовірність зустрічі?
Множина елементарних подій – квадрат D зі стороною L і точками (x, y), що позначають час зустрічаючихся. Тоді

$0 \le x \le L;$
$0 \le y \le L.$



Сприяють заданій події події точки, для яких
$$|y-x|<t.$$
Тобто, точки, що містяться між прямими
$$y=x-t, \quad y=x+t.$$
Тоді $$P(A)=\frac{S_A}{S_D}=\frac{L^2-(L-t)^2}{L^2}=1-\left(\frac{L-t}{L}\right)^2,$$
$$S_A=S_D-2S_K=L^2-2\frac{1}{2}(L-t)(L-t)=L^2-(L-t)^2.$$

2. По трубопроводу між пунктами A і B, відстань між якими 2 км, перекачують нафту. Яка імовірність того, що пошкодження через певний час роботи трубопроводу станеться на ділянці довжиною 100м?
$$P(A)=\frac{l}{L}=\frac{100}{2000}=0{,}05.$$

5. Відносна частота та її властивість стійкості.

Озн. *Відносною частотою* появи події A наз. відношення числа випробувань, в яких подія A відбулася, до загального числа випробувань.
$$W(A)=\frac{M}{N},$$
де: M – кількість появи події A,
N – загальна кількість випробувань.

Приклад.

1. Футболіст б'є по воротах 10 раз. Із них 8 раз влучно. Знайти відносну частоту влучань.
A – влучний кидок.
$$W(A)=\frac{M}{N}=\frac{8}{10}.$$
2. Відділ технічного контролю виявив 3 нестандартні деталі в партії із 80 випадково відібраних. Чому дорівнює відносна частота появи стандартних деталей?
A – з'явилася стандартна деталь
$$W(A)=\frac{M}{N}=\frac{87}{90}.$$

Заув. Визначення імовірності не вимагає, щоб випробування проводилося в дійсності. Відносна ж частота покладає, що випробування проведено фактично. Отже, імовірність випробування обчислюється до випробування, а відносна частота появи події по результатам випробування. В цьому полягає різниця між імовірністю появи події та її відносною частотою.

Властивість стійкості відносної частоти.

Детальні спостереження показали, якщо в однакових умовах проводяться дослідження, в кожному із яких кількість випробувань достатньо велика, то відносна частота появи події виявляє властивість стійкості. Ця властивість полягає в наступному:

в різних дослідженнях відносна частота появи події змінюється мало, тим менше, чим більше проводиться випробувань. Її значення знаходяться коло деякого постійного числа. Це постійне число і є імовірністю появи події.

Отже, якщо за допомогою випробування встановлено відносну частоту появи події, то отримане число можна приймати за наближене значення імовірності появи події.

Приклад.

В партії із 200 деталей відділ технічного контролю виявив 10 бракованих. Скільки можна чекати стандартних деталей серед 1000 перевірених?
A – деталь стандартна
$$W(A)=\frac{M}{N}=\frac{190}{200}=0{,}95.$$
Отже, $P(A)\approx 0{,}95$, за означенням $P(A)=\frac{m}{n}$, тоді
$$m=pn=0{,}95\cdot 1000=950.$$

6. Статистична імовірність.

Класичне означення імовірності має обмеження:

1. Воно вимагає, щоб кількість елементарних результатів випробування була скінченна.
2. Результати випробування повинні бути рівноможливими.

Тому на ряду з класичним означенням імовірності використовують також статистичне означення.

Озн. *Статистичною імовірністю події A* наз. границя її відносної частоти при необмежено зростаючий кількості випробувань.
$$P(A)=\lim_{n\to\infty}W(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}.$$

Приклад. Якщо в результаті достатньо великої кількості випробувань встановлено, що відносна частота появи події наближено дорівнює 0,3, то число 0,3 можна прийняти за статистичну імовірність появи заданої події.

Тема 2. Основні формули комбінаторики

1. Поняття множини.
2. Найпростіші операції над множинами.
3. Правила множення та додавання.
4. Перестановки.
5. Розміщення.
6. Комбінації.

1.Поняття множини.

З кінця XIX – початку XX сторіч найуніверсальнішою мовою математики стала мова множин. У так званій "наївній" теорії множин, батьком якої вважають німецького математика Г.Кантора, поняття множини елементів зводиться до таких положень:

- множина може складатися з будь-яких об'єктів (елементів), які відрізняються один від одного;
- множина однозначно визначається набором елементів, що її складають;
- будь-яка властивість визначає множину елементів, кожний з яких має цю властивість.

Отже, множину можна описати як сукупність деяких предметів, що об'єднані за певними ознаками, властивостями.

Приклад.

1. Множиною є кількість студентів в аудиторії.
2. Властивість числа бути кратним 2 визначає множину парних чисел.

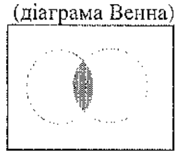
Залежно від кількості елементів множини бувають *скінченні* і *нескінченні*.

2.Найпростіші операції над множинами.

Озн. *Перетином* (*добутком*) множин A і B наз. множину C, яка складається з елементів, що одночасно належать кожній з даних множин A і B.

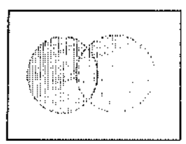
$$C = A\cap B \text{ або } C = A\cdot B$$

(діаграма Венна)



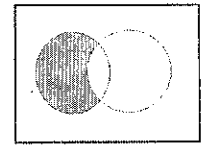
Озн. *Об'єднанням* (*сумою*) множин A і B наз. множину C, яка складається з елементів, що належать хоча б в одній з множин A або B.

$$C = A\cup B \text{ або } C = A+B$$



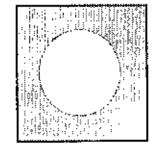
Озн. *Різницею* множин A і B наз. множину C, яка складається з усіх елементів множини A, що не належать множині B.

$$C = A\setminus B \text{ або } C = A-B$$



Озн. *Доповненням множини* A до множини B наз. множина, яка складається з усіх елементів множини B, що не належать множині A (тобто різниця множин B і A), якщо $A\subset B$.

$$\overline{A} = B\setminus A$$



Основні закони для дій над множинами:

1. ***Ідемпотентні закони***:
   $$A\cup A = A;\quad A\cap A = A.$$
2. ***Закони тотожності***:
   $$A\cup 0 = A;\quad A\cap A = A;$$
   $$A\cup I = I;\quad A\cap 0 = 0.$$
3. ***Закони* доповнення:**
   $$A\cup\overline{A} = I;\quad A\cap\overline{A} = 0;$$
   $$\overline{\overline{A}} = A;\quad \overline{I} = 0;\quad \overline{0} = I.$$
4. ***Закони комутативності***:
   $$A\cup B = B\cup A;\quad A\cap B = B\cap A.$$
5. ***Закони асоціативності***:
   $$A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C;\quad A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C.$$
6. ***Закони дистрибутивності***:
   $$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C);\quad A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C).$$
7. ***Закони де Моргана***:
   $$\overline{A}\cup\overline{B} = \overline{A\cap B};\quad \overline{A}\cap\overline{B} = \overline{A\cup B}.$$

3.Правила множення та додавання.

Правило множення. Нехай потрібно виконати одну за одною будь-які k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу – n_2 способами, ..., k-ту – n_k способами. То всі k дій разом можуть бути виконані $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Приклад.

1. В групі 30 чоловік Необхідно обрати старосту і профорга. Кількома способами можна це зробити?
   Старосту можна обрати 30 способами, бо кожен студент може бути обраним на цю посаду. Після того, як обрали старосту, на посаду профорга може бути обраний кожен із 29 студентів. За правилом множення на обидві посади існує
   $$30\cdot 29=870$$
   способів обрання.
2. Чотири юнаки і чотири дівчини сідають на 8 розміщених в ряд стільців. Юнаки сідають на місця з парними номерами, а дівчата – з непарними. Кількома способами це можна зробити?
   Юнаки місця з парними номерами можуть зайняти
   $$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$$
   способами, а дівчата – місця з непарними номерами
   $$4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$$
   способами. Всі разом, за правилом множення, можуть зайняти стільці
   $$24\cdot 24=576$$
   способами.

Правило додавання. Якщо дві дії взаємно виключають одна одну, при цьому одна з них може бути виконана n способами, а інша – m способами, то виконати одну будь-яку із цих дій можна $n+m$ способами.

Приклад.

В наявності є 20 виробівпершого сорту та 30 – другого. Необхідно вибрати 2 вироби одного сорту. Скільки існує способів вибору в даному випадку, якщо враховується черга вибору вироба.
Першими вибираємо вироби 1-го сорту. Для їх вибору існує
$$20\cdot 19=380$$
способів. Другими вибираємо вироби другого сорту. Для них існує
$$30\cdot 29=870$$
способів вибору. За правилом додавання загальне число вибору становить
$$380+870=1250.$$

4.Перестановки.

Перестановки без повторень.

Якщо m різних елементів $a_1, a_2, ..., a_m$ переставляти різними способами, не змінюючи їх кількість, змінюючи лише порядок, то кожна з отриманих груп називається *перестановкою.*

Озн. *Перестановкою* з m елементів наз. будь-яка впорядкована множина, в яку входять по одному разу усі m елементів заданої множини.

Позначається: P_m.

Кількість обчислюється за формулою: $P_m = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot m = m!$

Приклад.

1. Скільки трьохзначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, якщо кожна цифра в числі міститься один раз?
   Кожне з отриманих чисел є перестановкою з трьох елементів. Загальна кількість таких елементів становить

$$n = P_3 = 1\times 2\times 3 = 6.$$

2. Скільки чотиризначних чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, не повторюючи їх?
   Загальна кількість перестановок чотирьох елементів без повторень становить $P_4 = 4!$. З них $P_3 = 3!$ перестановок з нулем на першому місці.
   Отже, шукана кількість чотиризначних чисел дорівнює
   $$n = P_4 - P_3 = 3\cdot 3! = 18.$$

Перестановки з повтореннями.

Перестановки, які можуть мати однакові елементи наз. *перестановками з повтореннями.*

Класичною для сполуки *перестановка з повтореннями* є задача:

1) Скількома способами m_1 предметів одного сорту, m_2 предметів другого сорту, ..., m_k предметів k-го сорту можна *розмістити* по $n = m_1 + m_2 + ... + m_k$ різних місць?
2) Або: Скількома способами n різних місць можна розбити на k груп по $m_1, m_2, ..., m_k$ місць у кожній з груп відповідно.

Озн. *Перестановкою* n елементів k сортів по m_i елементів ($i=\overline{1,k}$) i-го сорту наз. всяке розбиття n-елементної множини на k груп, що не перетинаються, по m_i елементів у кожній i-й групі ($m_1 + m_2 + ... + m_k = n$).

Заув. 1.Характеристичними словами для перестановок з повтореннями є слова: *розмістити, переставити, розбити.*

2. Як і для звичайних перестановок (без повторень), всі місця повинні бути зайняті розміщуваними предметами. Різниця в тому, що предмети нерізні, але їх можна розбити на групи, кожна з яких об'єднує ідентичні предмети.

Позначається : $P(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Кількість обчислюється за формулою: $P(m_1, m_2, ..., m_k) = \dfrac{n!}{m_1!m_2!..m_k!}$.

Приклад.

1. Існує шестизначна кодова комбінація, що складається з цифр 1, 3, 5, в якій цифра 1 зустрічається один раз, цифра 3 – два рази, цифра 5 – три рази. Скільки існує комбінацій таких наборів?
   Маємо перестановки з повтореннями, загальна кількість, яких становить
   $$P_6(1;2;3) = \frac{6!}{1!2!3!} = 60.$$
2. Скільки слів можна отримати, переставляючи літери слів: 1) парабола, 2) математика.
   1) Переставляються три літери *а* та літери *п, р, б, л, о*. Загальна кількість перестановок з повтореннями становить
   $$P(3,1,1,1,1,1) = \frac{8!}{3!} = 6720.$$
   2) Переставляються три літери *а*, дві літери *м*, дві літери *т*, та літери *е, и, к*. Загальна кількість перестановок з повтореннями становить
   $$P(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3!2!2!} = 151200.$$

5.Розміщення.

Розміщення без повторень.

Якщо із m різних елементів вибираються групи по k елементів в кожній, при цьому елементи в отриманих групах розставляються в різній черзі, то отриманні групи наз. *розміщеннями із m елементів по k.*

Озн. *Розміщенням* із m різних елементів по k наз. будь-яку впорядковану підмножину із k елементів множини, що складається із m різних елементів.

Позначається: A_m^k.

Кількість обчислюється за формулою: $A_m^k=m(m-1)(m-2)...(m-(k-1))$ або $A_m^k=\dfrac{m!}{(m-k)!}$.

Приклад.

1. Скільки різних трьохзначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, якщо цифри в числі не повторюються?
   Кількість заданих трьохзначних чисел дорівнює числу розміщень із 8 цифр по трьох місцях
   $$A_8^3=8\cdot7\cdot6=336.$$
2. Скількома способами можна на 9 сторінках газети надрукувати 4 фотокарточки?
   Загальна кількість способів заданого друку становить
   $$A_9^4=9\cdot8\cdot7\cdot6=3024.$$

Розміщення з повторенням.

Розміщення, які можуть мати однакові елементи наз. *розміщеннями з повтореннями.*
Класичною для сполуки *розміщення з повтореннями* є задача:
скількома способами k різних предметів можна розмістити по m різних місцях?

Позначається: $\overline{A}_m^k$.

Кількість обчислюється за формулою: $\overline{A}_m^k=m^k$.

Зauв. 1. Характеристичним словом для розміщення з повторенням є слово: *розмістити.*
2. Кількість предметів може бути як більшою, так і меншою, а також рівною кількості місць. Всі предмети повинні бути розміщені, але не обов'язково на всіх місцях. Одне місце може бути зайняте одним, кількома предметами або залишитися вільним.

Приклад.

1. Скількома способами можна розмістити 8 різних предметів по 3 ящиках?
   Кожен з 8 предметів можна розмістити по трьох ящиках трьома способами незалежно від того, скільки предметів вже розміщено. Отже, загальна кількість способів розміщення заданих 8 предметів по 3 ящикам становить
   $$\overline{A}_3^8=3^8=6561.$$
2. Навісний замок має шість восьмикутних призм, кожна з яких повертається навколо своєї осі незалежно від інших. Бічні грані кожної із призм пронумеровані від 1 до 8. Скільки різних кодів можна задати на цьому замку?
   На кожній з призм може бути набрано по 8 цифр. Отже загальна кількість кодів становить
   $$\overline{A}_8^6=8^6=262144.$$
3. Маємо набір з 16 карток. На 4-х написано літеру A, на чотирьох – літеру $Б$, на чотирьох – літеру $В$, на чотирьох – літеру $Г$. Скільки різних наборів

можна отримати, вибираючи з усіх карточок 4 картки і розташовуючи їх в деякому порядку?
   На перше, друге, третє та четверте місця існує по чотири способи вибору літер. Отже, загальна кількість наборів букв становить
   $$\overline{A}_4^4=4^4=256.$$

Зauв. 1. Не слід кожну задачу на розміщення з повторенням пов'язувати з розміщенням деякої групи предметів по деякій множині місць. Наприклад, в задачі про кількість кодів k-циліндрового замка з m цифрами на кожному циліндрі можна помилитися, вважаючи циліндри місцями розміщення цифр.
2. Потрібно пам'ятати, що показник ступеня у виразі m^k дорівнює кількості елементів множини, яка у кожному розміщенні використовується повністю.

6.Комбінації.

Комбінації без повторення.

Якщо з m різних елементів вибираються групи по k елементів в кожній не звертаючи уваги на чергу елементів в кожній утвореній групі, то отримані групи наз. *комбінаціями.*

Озн. *Комбінацією* з m елементів по k наз. будь-яка підмножина із k елементів, які належать множині, що складається із m різних елементів.

Позначається: C_m^k.

Кількість обчислюється за формулою:

$$C_m^k=\frac{A_m^k}{P_m}=\frac{m(m-1)(m-2)...(m-(k-1))}{1\cdot2\cdot3...\cdot k} \quad \text{або} \quad C_m^k=\frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Приклад.

Скількома способами із 11 студентів можна вибрати групи по 5 чоловік в кожній.
Загальна кількість утворенних груп становить
$$C_{11}^5=\frac{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=462.$$

Комбінації з повтореннями.

Комбінації, які можуть мати однакові елементи наз. *комбінаціями з повтореннями.*
Класичною для сполуки *комбінація з повтореннями* є задача:
скількома способами можна скласти набір з k предметів, до якого входять предмети m видів: k_1 предметів першого виду, k_2 – другого виду, ..., k_m – m-го виду $(k_1+k_2+...+k_m=k)$.

Позначається: $\overline{C}_m^k$.

Кількість обчислюється за формулою: $\overline{C}_m^k=C_{k+m-1}^k=\dfrac{(k+m-1)!}{(m-1)!k!}$.

Приклад.

Скільки можна побудувати прямокутних паралелепипедів, довжини ребер яких виражаються натуральними числами від 1 до 10?
Шукана кількість дорівнює кількості наборів з трьох чисел (довжини граней), які можна скласти з чисел десяти видів (1, 2, ..., 10):
$$\overline{C}_{10}^3=C_{10+3-1}^3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3!}=220.$$

Тема 3. Основні формули теорії імовірностей.

1. Залежні та незалежні події.
2. Умовна імовірність.
3. Теорема добутку імовірностей подій.
4. Теорема додавання імовірностей подій.
5. Повна група подій.
6. Протилежні події.
7. Імовірність появи хоча б однієї події.

1. Залежні та незалежні події.

Озн. Дві події наз. *незалежними*, якщо імовірність появи однієї з них не змінюється в залежності від того, чи відбулася інша подія.

Приклад.

1. Монету кидають два рази. При цьому події:
A - герб випав в перший раз,
B - герб випав в другий раз є незалежними, тому що випадіння герба в першому випробуванні не залежить від випадіння герба в другому випробованні і навпаки.

2. В ящику 6 білих і 9 чорних куль. Із ящика беруть навмання одну кулу. Вона виявилася білою. Кулю повернули в ящик. Знову навмання беруть із ящика одну кулю. Вона виявилася білою.Події:
A - біла куля з'явилася в перший раз,
B - біла куля з'явилася в другий раз є незалежними.

Озн. Дві події наз. *залежними*, якщо імовірність появи однієї з них змінюється в залежності від того, чи відбулася інша подія.

Приклад.

В ящику 5 білих і 6 чорних куль. Навмання беруть із ящика одну кулю. Куля виявилася білою. Із ящика виймають іще одну кулю. Куля знову виявилася білою. Події:
A - біла куля з'явилася в перший раз
B - біла куля з'явилася в другий раз є залежними .

Озн. Група подій A_1, A_2, ..., A_n наз. *незалежними в сукупності,* якщо кожна із них і будь яка комбінація інших є подіями незалежними.

Приклад.

1. Монету кидають 10 раз. Поява герба кожного разу не залежить від інших кидань монети.
2. Кидають три рази кубик. Поява грані з 4 очками в кожному випробуванні не залежить від інших випробувань.

Озн. Події наз. A_1, A_2, ..., A_n *попарно незалежними*, якщо кожні дві із них незалежні.

Приклад.

Майстр виробив 6 деталей. Нехай події A_1, ..., A_6 виражають стандартність відповідно 1, 2, ..., 6 деталі. Кожні дві із цих подій є незалежними.

2. Умовна імовірність.

Нехай дві події A і B залежні. Із означення залежних подій відомо, що імовірність однієї із них залежить від появи іншої. Тому, якщо нас цікавить імовірність, напр., події B, то важливо знати, чи відбулася подія A.

Озн. *Умовною імовірністю* події B наз. імовірність події B, обчислена при умові, що подія A вже відбулася.

Позначається: $P_A(B)$.

Приклад.

1. Студент на екзамені тягне питання другим. Перед ним інший студент витяг питання, на яке перший студент знає відповідь. Яка імовірність того, що другий студент витягне питання, на яке знає відповідь, якщо всього 60 питань, а він вивчив 50?
A - перший студент витяг питання, на яке другий знає відповідь;
B - другий студент витяг питання, на яке знає відповідь.
$$P(A)=\frac{50}{60}\approx 0{,}833,$$
$$P_A(B)=\frac{49}{59}\approx 0{,}831.$$
2. В ящику 4 червоні і 6 білих куль. Навмання витягають послідовно дві кулі. Знайти імовірністьтого, що другою витягнуть білу кулю, якщо першою витягли червону кулю.
A - першою витягли червону кулю;
B - другою витягли білу кулю.
$$P(A)=\frac{4}{10}\approx 0{,}4,$$
$$P_A(B)=\frac{6}{9}\approx 0{,}67.$$

Заув. Для незалежних подій виконуються рівності:
$$P_A(B)=P(B) \quad \text{і} \quad P_B(A)=P(A).$$
Тобто умовні імовірності незалежних подій дорівнють їх безумовним імовірностям.

3. Теорема добутку імовірностей подій.

Озн. *Добутком подій A і B* наз. така подія C, яка полягає в тому, що події A і B відбуваються одночасно.

Приклад.

Нехай: A - "деталь виготовлена на Львівському заводі";
B - "деталь стандартна".
Добутком подій A і B є подія, яка полягає в тому, що "деталь виготовлена на Львівському заводі і вона стандартна".

Теорема 1. (*Добутку імовірностей*)
Імовірність добутку двох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них і умовної імовірності іншої, при умові, що перша вже відбулася.

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=P(B)P_B(A).$$

Доведення. Використовуємо геометричне означення імовірності.

$$P(AB)=\frac{S_{AB}}{S_D}=\frac{S_A S_{AB}}{S_D S_A}=\frac{S_A}{S_D}\cdot\frac{S_{AB}}{S_A}=P(A)P_A(B).$$

Теорему доведено.

Приклад.

1. Серед 25 електролампочок 4 нестандартні. Послідовно беруть навмання дві електролампочки. Яка імовірність того, що обидві електролампочки будуть нестандартні?
A – перша електролампочка виявиться нестандартною,
B – друга електролампочка виявитьсях нестандартною.
$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{4}{25}\cdot\frac{3}{24}\approx 0{,}02.$$

2. Розвідницький пристрійскладається з антенної системи, що обертається, та приймача, у якому періодично змінюється налагодження. Сигнал виявляється і проходить на вихід пристрою, коли антена направлена на джерело сигналу (подія A), а приймач при цьому налагоджений на його частоту (подія B). Знайти імовірність виявлення сигналу пристроєм, якщо $P(A)=0{,}8$, а імовірність виявлення сигнала приймачем (спавпадіння по частоті) при умові, що сигнал пройшов антену, дорівнює 0,5.
За теоремою добутку двох імовірностей маємо:
$$P(AB)=P(A)P_A(B)=0{,}8\cdot 0{,}5=0{,}4.$$

Заув. Якщо події A і B – незалежні, то імовірність добутку подій дорівнює добутку їх імовірностей.

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Приклад. Два пеленгатори з різних місць незалежно пеленгують один і той самий радіопередавач з імовірністю 0,9 кожен. Знайти імовірність виявлення місця роботи радіопередавача, якщо він буде виявлений лише у випадку, коли його запеленгують обидва пеленгатори.
A – перший пеленгатор запеленгує радіопередавач,
B – другий пеленгатор запеленгує радіопередавач.
Місце дії радіопередавача буде встановлено, якщо його запеленгують обидва пеленгатори. За теоремою добутку для двох незалежних подій знаходимо:
$$P(AB)=P(A)P(B)=0{,}9\cdot 0{,}9=0{,}81$$

Наслідок. (З теореми добутку)
Імовірність добутку подій A_1, A_2, ..., A_n обчислюється за формулою:
$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$$

Доведення.
$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2A_3...A_n)=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3A_4...A_n)=...=$$
$$=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n).$$

Приклад. Прилад складається з n блоків.

— — — ... —

Вихід із ладу кожного блоку означає вихід із ладу приладу вцілому. Блоки виходять із ладу незалежно один від одного. Надійність роботи (ймовірність безвідмовної роботи) кожного блоку дорівнює p. Знайти надійність приладу вцілому.
За наслідком із теореми добутку для незалежних подій маємо:
$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)...P(A_n)=p^n.$$

Заув. З теореми добутку імовірностей двох подій отримуємо формулу для обчислення умовної імовірності події

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Цю рівність можна прийняти за означення умовної імовірності при умові, що $P(A)\neq 0$. Якщо $P(A)=0$, то умовна імовірність не визначена.

4. Теорема додавання імовірностей подій.

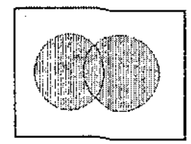
Озн. *Сумою двох подій A і B* наз. така подія C, яка полягає в тому, що відбувається подія A або подія B, або обидві події одночасно.

Приклад. Отримали два лотерейні квитки. Якщо:
A – "виграв перший квиток",
B – "виграв другий квиток",
то подія $C=A+B$ полягає в тому, що "виграв перший квиток і не виграв другий" або "не виграв перший і виграв другий", або "виграли обидва квитки".

Озн. *Сумою подій* A_1, A_2, ..., A_n наз. подія C, яка полягає в тому, що відбулася хоча б одна із цих подій.

Теорема 2. (*Суми імовірностей двох подій*)
Імовірність суми двох подій дорівнює сумі імовірностей цих подій без імовірності їх сумісної появи.
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доведення. Використовуємо геометричне означення імовірності.



$$P(A+B)=\frac{S_A+S_B-S_{AB}}{S_D}=\frac{S_A}{S_D}+\frac{S_B}{S_D}-\frac{S_{AB}}{S_D}=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорему доведено.

Заув. 1. Події A і B можуть бути як залежними, так і незалежними:
- для залежних подій $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P_A(B)$,
- для незалежних подій $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$.

2. Якщо події A і B несумісні, то $P(AB)=0$, тоді $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

3). Для будь-яких подій $P(A+B)\leq P(A)+P(B)$.

Приклад.

1. По мережі зв'язку передаються тільки повідомлення a, b, c відповідно з імовірностями 0,5; 0,3; 0,2. Знайти імовірність передачі повідомлення a або b.
   A – передача повідомлення a,
   B – передача повідомлення b.
   Події A і B несумісні, отже,
   $$P(A+B)=P(A)+P(B) = 0,5 + 0,3 = 0,8.$$

2. Виявлення повітряної цілі виконується незалежно двома радіолокаційними станціями. Імовірність виявлення цілі першою станцією становить 0,7, другою станцією – 0,8. Визначити імовірність того, що ціль буде виявлена хоча б однією станцією.
   A – виявлення цілі першою станцією,
   B – виявлення цілі другою станцією.
   Тоді подія $C = A + B$ полягає в тому, що ціль буде виявлена хоча б однією станцією. Події A і B незалежні, отже, маємо
   $$P(A+B)= P(A)+P(B) - P(A)P(B) = 0,7 + 0,8 - 0,7\cdot 0,8 = 0,94.$$

Наслідок. (З теореми додавання)

Імовірність суми несумісних подій A_1, A_2, ..., A_n обчислюється за формулою:
$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Доведення. Події несумісні, отже
$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2+A_3+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3+A_4+...+A_n)=...=$$
$$=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Приклад. В партії з N напівпровідникових триодів є M бракованих. Для контролю із партії навздогад беруть n триодів. Яка імовірність того, що серед них буде не більше m бракованих?

A_0 – серед узятих на перевірку n триодів жодного бракованого,
A_1 – серед узятих на перевірку n триодів один бракований,
A_2 – серед узятих на перевірку n триодів два бракованих,
...
A_m – серед узятих на перевірку n триодів m бракованих.

Події A_1, A_2, ..., A_m – несумісні. Тоді подія $A = A_0 + A_1 + A_2 + ... + A_m$ полягає в тому, що серед вибраних n триодів буде не більше m бракованих. За наслідком із теореми додавання маємо:
$$P(A_1 + A_2 + ... + A_m) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_m).$$

Імовірність події A_k обчислюється за класичним означенням
$$P(A_k) = \frac{m}{n} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Тоді
$$P(A) = \sum_{k=0}^{m} P(A_k) = \frac{\sum_{k=0}^{m} C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

5. Повна група подій.

Озн. *Повною групою подій* наз. сукупність єдиноможливих подій випробування.

Приклад.

Придбано два лотарейних білетів. Події:
A – виграшним виявився перший білет, другий – ні,
B – виграшним виявився другий білет, перший – ні,
C – виграшним виявилися обидва білети,
D – виграшним не виявився жоден білет.
Події A, B, C, D утворюють повну групу.

Заув. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу, то вони несумісні.

Теорема 3. (*Імовірність повної групи подій*)

Сума імовірностей подій , що утворюють повну групу, дорівнює одиниці.
$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$

Доведення. Нехай події A_1, A_2, ..., A_n утворюють повну групу. Сума подій, що утворюють повну групу є подією достовірною. Імовірність достовірної події дорівнює 1. Тобто
$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1.$$
Події, що утворюють повну групу є несумісними. Отже, за наслідком із теореми додавання імовірностей маємо:
$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1.$$
Теорему доведено.

Приклад.

Підприємство отримує деталі від трьох заводів-постачальників: a, b, c. Імовірність того, що партія деталей отримана від заводу a становить 0,3, від c – 0,4. Знайти імовірність того, що отримана партія деталей прийшла від постачальника b.
A – партія деталей отримана від постачальника a,
B – партія деталей отримана від постачальника b,
C – партія деталей отримана від постачальника c.
Події A, B, C утворюють повну групу. Отже,
$$P(A)+P(B)+P(C)=1.$$
Звідки
$$P(B) = 1 - (P(A) + P(C)) = 1 - (0,3 + 0,4) = 0,3.$$

6. Протилежні події.

Озн. *Протилежними* наз. дві єдиноможливі події даного випробування, що утворюють повну групу.

Позначається: подія A, їй протилежна – $\overline{A}$.

Приклад. Зробили постріл: A – постріл влучний, $\overline{A}$ – промах.

Теорема 4. (*Імовірність протилежних подій*).

Сума імовірностей протилежних подій дорівнює 1.
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Доведення. Нехай події A і $\overline{A}$ – протилежні. Значить вони утворюють повну групу. Сума імовірностей подій , що утворюють повну групу дорівнює 1. Тобто

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Позначається: $P(A)=p$; $P(\overline{A})=q$. Отже,

$$p+q=1.$$

Теорему доведено.

Приклад.

1. Імовірність того, що день буде сонячним становить 0,8. Яка імовірність того, що піде дощ?
   A – день сонячний
   $$q=1-0{,}8=0{,}2.$$
2. Якщо імовірність того, що деталь стандартна становить 0,85, то імовірність того, що вона бракована $q=1-0{,}85=0{,}15$.

7. Імовірність появи хоча б однієї події.

Теорема 5. (*Імовірність появи хоча б однієї події*)

Імовірність появи хоча б однієї з подій A_1, A_2, ..., A_n незалежних в сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком імовірностей протилежних подій $\overline{A_1},\overline{A_2},...\overline{A_n}$.

$$P(A)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}...\overline{A_k}).$$

Доведення. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що відбулася хоча б одна з подій A_1, A_2, ..., A_n. Події A і добуток $\overline{A_1},\overline{A_2},...\overline{A_n}$ – протилежні, тоді

$$P(A)+P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}...\overline{A_n}\right)=1.$$

Отже, $P(A)=1-P(\overline{A_1},\overline{A_2},...\overline{A_k})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})...P(\overline{A_k})=1-q_1q_2...q_n$.

Теорему доведено.

Заув. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n мають однакову імовірність, що дорівнює p, то імовірність появи хоча б однієї з цих подій обчислюється за формулою:

$$P(A)=1-q^k.$$

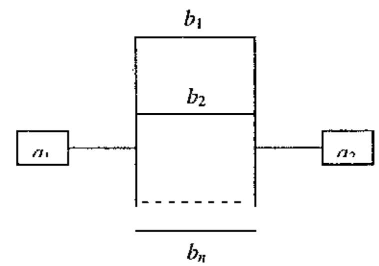
Приклад.

1. По каналу зв'язку передається трибуквена кодова комбінація. Імовірності перекручення букв дорівнюють 0,05; 0,08; 0,01 відповідно. Знайти імовірністьперекручення хоча б однієї букви.
   A_1 – перекручена перша буква,
   A_2 – перекручена друга буква,
   A_3 – перекручена третя буква.
   A – перекручена хоча б одна буква.
   $$q_1=1-p_1=1-0{,}05=0{,}95,$$
   $$q_2=1-p_2=1-0{,}08=0{,}92,$$
   $$q_3=1-p_3=1-0{,}01=0{,}99.$$

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})=1-q_1q_2q_3=1-0{,}95\cdot 0{,}92\cdot 0{,}99\approx 0{,}135.$$

2. При передачі повідомлення використовується імпульсний код (1 – імпульс, 0 – відсутність імпульса). Перешкоди не можуть змінити сигнал "1", але можуть перекрутити сигнал "0", так що він буде сприйнятий за одиницю, з імовірністю p=0,1. Для боротьби з перешкодами повідомлення, що містить три нулі, передається два рази. Накопичуючий пристрій видає "0", якщо хоча б один раз прийнятий "0" і в усіх інших випадках – "1". Знайти імовірність перекручення повідомлення, що передається, якщо перекручення кожного нуля відбувається незалежно.
   A_k – перекручення k-го нуля після подвійної передачі $(k=1,2,3)$.
   $$P(A_k)=p^2 \quad (k=1,2,3),$$
   $$q_k=1-p^2 \quad (k=1,2,3).$$
   A – перекручення повідомлення, що передається.
   $$P(A)=1-P\left(\overline{A_1\,A_2\,A_3}\right)=1-\left(1-p^2\right)^3=1-\left(1-0{,}1^2\right)^3\approx 0{,}03.$$

3. Між двома пунктами відбувається обмін інформацією за схемою



де a_1, a_2 – кінцева апаратура; b_1, b_2, ..., b_n – взаємно дублюючі канали. Імовірність безвідмовної роботи кожного з пристроїв a_1 та a_2 кінцевої апаратури за проміжок часу T становить 0,99, а кожного із взаємно дублюючих каналів b_1, b_2, ..., b_n дорівнює 0,5. Скільки повинно бути взаємно дублюючих каналів, щоб імовірність безвідмовної роботи всієї системи за проміжок часу T була не менша за 0,94? Всі пристрої і канали працюють незалежно.
A_k – безвідмовна робота k –го кінцевого пристроя (k =1,2).
$$P(A_k)=0{,}99 \quad (k=1,2).$$
B_k – безвідмовна робота k –го взаємно дублюючого канала (k =1, 2, ..., n).
$$P(B_k)=0{,}5 \quad (k=1,\ 2,\ ...,\ n).$$
A – безвідмовна робота системи.
$$P(A)=P(A_1A_2(B_1+B_2+...+B_n))=P(A_1)P(A_2)\left(1-P(\overline{B_1})P(\overline{B_2})...P(\overline{B_n})\right)\geq 0{,}94.$$
Отримуємо нерівність:
$$0{,}99^2\left(1-0{,}5^n\right)\geq 0{,}94.$$
Звідки отримуємо
$$2^n\geq\frac{1}{1-\dfrac{0{,}94}{0{,}99^2}}\approx 25.$$
Нерівність виконується, якщо $n\geq 5$.

Тема 4. Формула повної імовірності.

1. Формула повної імовірності.
2. Формули Байсса.

1. Формула повної ймовірності.

Теорема. (*Формула повної імовірності*)
Імовірність появи події A, яка може відбутися лише при умові появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, ..., B_n, що утворюють повну групу, дорівнює сумі попарних добутків імовірностей кожної із цих подій на відповідну умовну імовірність події A:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Доведення. За умовою подія A може відбутися, якщо відбудеться одна із несумісних подій B_1, B_2, ..., B_n. Отже, поява події A означає існування однієї із несумісних подій B_1A, B_2A, ..., $B_n A$, тобто

$$A=B_1 A+B_2 A+...+B_n A.$$

За наслідком із теореми додавання імовірностей отримуємо

$$P(A)=P(B_1A)+P(B_2A)+...+P(B_nA).$$

За теоремою добутку імовірностей залежних подій маємо:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Теорему доведено.

Заув. Події B_1, B_2, ..., B_n наз. *гіпотезами.*

Приклад.

1.На першому заводі із кожних 100 радіоламп виготовляється в середньому 90 стандартних, на другому – 95, на третьому – 85. Продукція цих заводів становить відповідно 50, 30, 20 процентів усіх радіоламп, що потрапляють у магазин данного району. Знайти імовірність придбання стандартної радіолампи.
A – придбана стандартна радіолампа.
Гіпотези: B_1 – радіолампа виготовлена першим заводом,
B_2 – радіолампа виготовлена другим заводом,
B_3 – радіолампа виготовлена третім заводом.
Імовірності гіпотез:

$$P(B_1) = 0{,}5; \qquad P(B_2) = 0{,}3; \qquad P(B_3) = 0{,}2.$$

Умовні імовірності події A:

$$P_{B_1}(A)=0{,}9; \qquad P_{B_2}(A)=0{,}95; \qquad P_{B_3}(A)=0{,}85.$$

За формулою повної імовірності маємо:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+P(B_3)P_{B_3}(A)=$$
$$= 0{,}5\cdot0{,}9 + 0{,}3\cdot0{,}95 + 0{,}2\cdot0{,}85 = 0{,}905.$$

2.Імовірності того, що параметри одного із трьох блоків радіостанції вийдуть за час польоту літака із допусків, відповідно становлять 0,1; 0,2; 0,3. Якщо з поля допусків вийшли параметри одного блоку, зв'язок не буде встановлений з імовірністю 0,25, якщо двох блоків, то з імовірністю 0,4, якщо трьох, то з імовірністю 0,5. Знайти імовірність того, що зв'язок не буде встановлено.
A – зв'язок буде встановлено.
Гіпотези: B_1 – за поле допусків вийшли параметри одного блоку;
B_2 – за поле допусків вийшли параметри двох блоків;
B_3 – за поле допусків вийшли параметри трьох блоків;
B_4 – за поле допусків не вийшли парамтри жодного з блоків.
Імовірності гіпотез:

$$P(B_1)=0{,}1(1-0{,}2)(1-0{,}3)+(1-0{,}1)0{,}2(1-0{,}3)+(1-0{,}1)(1-0{,}2)0{,}3=0{,}398;$$
$$P(B_2)=0{,}1\cdot0{,}2(1-0{,}3)+0{,}1(1-0{,}2)0{,}3+(1-0{,}1)0{,}2\cdot0{,}3=0{,}092;$$
$$P(B_3)=0{,}1\cdot0{,}2\cdot0{,}3=0{,}006;$$
$$P(B_4)=(1-0{,}1)(1-0{,}2)(1-0{,}3)=0{,}504.$$

Умовні імовірності події A:

$$P_{B_1}(A)=0{,}25; \quad P_{B_2}(A)=0{,}4; \quad P_{B_3}(A)=0{,}5; \quad P_{B_4}(A)=0.$$

За формулою повної імовірності отримуємо:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P_{B_i}(A)=0{,}398\cdot0{,}25+0{,}092\cdot0{,}4+0{,}006\cdot0{,}5+0{,}504\cdot0\approx0{,}139.$$

9. Формули Байєса.

Нехай подія A може відбутися при умові появи однієї з несумісних подій B_1, B_2, ..., B_n, що утворюють повну групу. Оскільки невідомо, яка із цих подій відбудеться, то їх називають гіпотезами. Імовірність появи події A визначається за формулою повної ймовірності:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)+...+P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Припустимо, що випробування здійснено. Нехай в результаті випробування відбулася подія A. Як змінилися при цьому імовірності гіпотез $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, ... $P_A(B_n)$?

Спочатку знаходимо умовну імовірність $P_A(B_i)$. За теоремою добутку імовірностей маємо:

$$P(AB_i)=P(A)P_A(B_i)=P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Тоді

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)P_{Bi}(A)}{P(A)}.$$

Отримані формули наз. *формулами Байєса.*

Заув. Формули Байєса дають можливість переоцінити імовірності гіпотез після того, як встановлено результат випробування, в результаті якого відбулася подія A.

Приклад.

1. По лінії зв'язку передаються два сигнали a і b з імовірностями 0,84 та 0,16 відповідно. Через перешкоди $\frac{1}{6}$ сигналів a перекручуються і сприймаються як b-сигнали, а $\frac{1}{8}$ переданих сигналів b сприймаються як a-сигнали. Якщо відомо, що отриманий сигнал a, яка імовірність того, що його і передали?
A – на прийомному пукті з'явиться сигнал a.
Гіпотези: B_1 – переданий сигнал a;
B_2 – переданий сигнал b.
Імовірності гіпотез:

$$P(B_1)=0{,}84; \quad P(B_2)=0{,}16.$$

Умовні імовірності події A:

$$P_{B_1}(A)=\frac{5}{6};\quad P_{B_2}(A)=\frac{1}{8}.$$

За формулою повної імовірності отримуємо:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}84\cdot\frac{5}{6}+0{,}16\cdot\frac{1}{8}=0{,}72.$$

Імовірність того, що був переданий a-сигнал при умові, що він же і отриманий, обчислюємо за формулами Байєса:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}84\cdot\frac{5}{6}}{0{,}72}=0{,}97.$$

2. По каналу зв'язку, на який можуть діяти перешкоди, передається один з двох наказів у вигляді кодових комбінацій 11111 або 00000. Імовірності передачі цих наказів відповідно становлять 0,7 та 0,3. Через перешкоди імовірності вірного отримання кожного із символів (1 або 0) зменшується до 0,6. Покладається, що символи кодових комбінацій перекручуються незалежно одна від одної. Приймачем була отримана комбінація 10110. Визначити, який наказ був відправлений.

A – отримана комбінація 10110.

Гіпотези: B_1 – відправлена комбінація 11111;

B_2 – відправлена комбінація 00000.

Імовірності гіпотез:

$$P(B_1)=0{,}7;\quad P(B_2)=0{,}3.$$

Умовні імовірності події A:

$$P_{B_1}(A)=0{,}6\cdot0{,}4\cdot0{,}6\cdot0{,}6\cdot0{,}4\approx0{,}035;$$

$$P_{B_2}(A)=0{,}4\cdot0{,}6\cdot0{,}4\cdot0{,}4\cdot0{,}6\approx0{,}023.$$

За формулою повної імовірності отримуємо:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=0{,}7\cdot0{,}035+0{,}3\cdot0{,}023=0{,}0314.$$

За формулами Байєса знаходимо:

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}7\cdot0{,}035}{0{,}0314}\approx0{,}78;$$

$$P_A(B_2)=\frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)}=\frac{0{,}3\cdot0{,}023}{0{,}0314}\approx0{,}22.$$

Порівнявши отримані імовірності, приходимо до висновку, що при отриманій комбінації 10110 з імовірністю 0,78 був відправлений наказ 11111.

Тема 5. Повторні незалежні випробування.

1. Формула Бернуллі.
2. Найімовірніше число настання події.
3. Формула Пуассона.
4. Локальна теорема Лапласа.
5. Інтегральна теорема Лапласа.
6. Імовірність відхилення відносної частоти від імовірності в незалежних випробуваннях.

1. Формула Бернуллі.

Озн. *Незалежними відносно події A* наз. випробування, імовірність настання події A в кожному з яких не залежить від результатів інших випробувань.

Теорема 1. (*Формула Бернуллі*).

Імовірність того, що в n незалежних повторних випробуваннях випадкова подія A відбудеться рівно k раз обчислюється за формулою:

$$P_n^k(A)=C_n^k p^k q^{n-k},$$

де: p – імовірність появи події A в одному випробуванні;

q – імовірність непояви події A в одному випробуванні.

Доведення. Визначаємо спочатку імовірність того, що в k випробуваннях подія A відбудеться, а в $n-k$ випробуваннях – не відбудеться. За наслідком із теореми добутку для незалежних подій ця імовірність становить:

$$P=p^k q^{n-k}.$$

Розглянуто випадок, коли подія A відбувається в перших k випробуваннях. Для визначення шуканої імовірності потрібно перебрати всі можливі комбінації. Їх кількість дорівнює кількості комбінацій із n по k, тобто C_n^k.

Отже, імовірність того, що в n незалежних повторних випробуваннях випадкова подія A відбудеться рівно k раз обчислюється за формулою:

$$P_n^k(A)=C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Теорему доведено.

Приклад.

1. Наказ передається по радіо серією кодованих сигналів. В серії з 10 сигналів, імовірність отримання кожного із сигналів радістом в умовах перешкод дорівнює 0,2. Всі сигнали однакові. Наказ рахується прийнятим, якщо радіст отримає із серії три сигнали. Яка імовірність того, що наказ буде отриманий радістом.

   A – сигнал прийнятий радістом.

   Імовірність отримання одного сигналу становить p=0,2. Тоді імовірність неотримання сигналу дорівнює $q=1-p=1-0{,}2=0{,}8$. Кількість випробувань дорівнює числу сигналів, тобто $n=10$. За формулою Бернуллі отримуємо:

   $$P_{10}^3(A)=C_{10}^3p^3q^7=\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}\cdot0{,}2^3\cdot0{,}8^7\approx0{,}201.$$

2. По даним ВТК заводу радіоламп, на сотню ламп, що потрапляють до цеху остаточної обробки, припадає 30 ламп нестандартних. Яка імовірність, що випадково взяті 7 ламп будуть мати дефекти не більше ніж на двох лампах.

   A – лампа з дефектом.

Імовірність того, що одна лампа має дефект дорівнює $p=\frac{30}{100}=0{,}3$. Тоді імовірність того, що лампа не має дефекту становить $q=1-p=1-0{,}3=0{,}7$.

Шукана імовірність дорівнює сумі:

$$P=P_7^0(\dot{A})+P_7^1(\dot{A})+P_7^2(\dot{A}).$$

Обчислюємо кожну з імовірностей:

$$P_7^0(\dot{A})=C_7^0p^0q^7=1\cdot1\cdot0{,}7^7\approx0{,}082$$

$$P_7^1(A)=C_7^1p^1q^6=7\cdot0{,}3\cdot0{,}7^6\approx0{,}247$$

$$P_7^2(A)=C_7^2p^2q^5=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}\cdot0{,}3^2\cdot0{,}7^5\approx0{,}318$$

Тоді

$$P=0{,}082+0{,}247+0{,}318=0{,}647.$$

Заув. Формула Бернуллі застосовується, коли кількість випробувань невелика ($n\le10$).

2.Найімовірніше число настання події.

Якщо проведено n повторних незалежних випробувань, то подія A може відбутися в них 1, 2, ..., n раз. За формулою Бернуллі можна обчислити кожну з ймовірностей

$$P_n^0(A),\ P_n^1(A),\ P_n^2(A),\ \dots,\ P_n^n(A).$$

Серед цих чисел обов'язково знайдеться найбільше. Нехай найбільшою є ймовірність $P_n^{k_0}(A)$. Тоді число k_0 наз. *найімовірнішим числом настання події* A в n повторних незалежних випробуваннях.

Заув.1. За допомогою формули Бернуллі неважко переконатися, що найімовірніше число настання події A в n незалежних повторних випробуваннях обчислюється за формулою:

$$np-q\le k_0\le np+p.$$

Заув.2. 1.Різниця між лівою і правою частинами нерівності дорівнює "-1".

2.Якщо $(np-q)$ – дріб, то існує одне найімовірніше число.

3.Якщо $(np-q)$ – ціле число, то існує два найімовірніших числа k_0 і k_0+1.

4.Якщо np – ціле число, то найімовірніше число $k_0=np$.

Приклад.

Імовірність отримання сигналу радістом становить 0,7. Передано 5 сигналів. Знайти найімовірніше число отриманих сигналів.

Використовуємо формула для обчислення найімовірнішого числа настання події A в n незалежних повторних випробуваннях

$$np-q\le k_0\le np+p.$$

Тут n=5, p=0,7, q=1–p=0,3.

$$5\cdot0{,}7-0{,}3\le k_0\le5\cdot0{,}7+0{,}7$$

$$3{,}2\le k_0\le4{,}2$$

$$k_0=4$$

Отже, найімовірніше число отриманих сигналів дорівнює 4.

3.Формула Пуассона.

Теорема 2. (*Формула Пуассона*)

Якщо число n незалежних випробувань достатньо велике, а імовірність p появи події A в кожному випробуванні постійна, і мала настільки, що добуток np також малий, то імовірність настання події A в n незалежних повторних випробуваннях рівно k раз обчислюєтьзя за формулою:

$$P_n^k(A)\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \text{де}\ \lambda=np.$$

Доведення. Нехай проводиться n незалежних повторних випробувань, в кожному із яких імовірність настання події A постійна і дорівнює p. Нехай добуток np є постійне число, а саме

$$np=\lambda.$$

Використаємо формулу Бернуллі для обчислення імовірності настання події A в n незалежних повторних випробуваннях рівно k раз

$$P_n^k(A)=C_n^kp^kq^{n-k}.$$

У формулу Бернуллі замість імовірності p підставимо вираз $\frac{\lambda}{n}$ ($np=\lambda$), а замість $q=1-\frac{\lambda}{n}$.

Отримуємо:

$$P_n^k(A)=\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1\cdot2\dots k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

Знаходимо границю

$$\lim_{n\to\infty}P_n^k(A).$$

Отримаємо наближене значення імовірності

$$P_n^k(A)=\lim_{n\to\infty}P_n^k(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}{1\cdot2\dots k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}=$$

$$=\frac{\lambda^k}{k}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\dots\frac{n-k+1}{n}(1-\lambda)^{\frac{n}{\lambda}(-\lambda)}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Теорему доведено.

Приклад.

Радіоприлад містить 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного, причому кожний може вийти із ладу під час роботи приладу з ймовірністю 0,002. Обчислити імовірність того, що під час роботи приладу з ладу вийдуть від трьох до шести елементів.

A – мікроелемент вийде з ладу.

Оскільки кількість випробувань велика, а імовірність настання події в одному випробування мала, то використовуємо формулу Пуассона.

$$\lambda=np=1000\cdot0{,}002=2$$

Шукана імовірність дорівнює сумі

$$P_{1000}(3\le k\le6)=P_{1000}^3(A)+P_{1000}^4(A)+P_{1000}^5(A)+P_{1000}^6(A).$$

Обчислюємо кожну з імовірностей:

$$P_{1000}^3(A)=\frac{2^3}{3!}e^{-2}\approx0{,}18;$$

$$P_{1000}^4(A)=\frac{2^4}{4!}e^{-2}\approx0{,}17;$$

$$P_{1000}^{5}(A)=\frac{2^5}{5!}e^{-2}\approx 0{,}10\,;$$

$$P_{1000}^{6}(A)=\frac{2^6}{6!}e^{-2}\approx 0{,}05\,.$$

Тоді

$$P_{1000}(3\le k\le 6)\approx 0{,}18+0{,}17+0{,}10+0{,}05=0{,}61\,.$$

Заув. Формула Пуассона використовується, якщо λ приймає невеликі значення ($\lambda \le 10$).

4.Локальна теорема Лапласа.

Теорема 3. (*Локальна формула Лапласа*).

Якщо імовірність настання події A в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля та одиниці, то імовірність настання події в n випробуваннях рівно k раз обчислюється за формулою

$$P_n^k(A)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\text{, де }\quad x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\,.$$

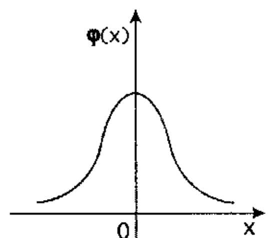
Заув. Функція $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ наз. *функцією Гаусса.*

Локальну формулу Лапласа можна записати у вигляді

$$P_n^k\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)\text{, де }x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Властивості функції Гаусса.

1. Функція Гаусса протабульована на відрізку $[0,4]$.
2. Якщо $x>4$, то $\varphi(x)=0$.
3. Функція Гаусса – парна.



Приклад.

У виготовленій партії резисторів 75% виробів не мають дефектів. Із партії випадковим чином беруть 400 резисторів. Обчислити імовірність того, що серед відібраних виявиться 290 штук резисторів не будуть мати дефекти.

A – резистор не має дефектів.

Шукану імовірність обчислюємо за локальною формалою Лапласа.

Обчислюємо значення аргумента функції Гаусса:

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{290-400\cdot 0{,}75}{\sqrt{400\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}=-1{,}15\,.$$

За таблицею знаходимо значення функції Гаусса, враховуючи, що вона є парною:

$$\varphi(-1{,}15)\approx 0{,}20594\,.$$

Тоді

$$P_{400}^{290}(A)\approx\frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}=\frac{\varphi(-1{,}15)}{\sqrt{400\cdot 0{,}75\times 0{,}25}}\approx 0{,}024\,.$$

5. Інтегральна теорема Лапласа.

Теорема 4. (*Інтегральна формула Лапласа*)

Якщо імовірність настання події в кожному випробуванні постійна і відмінна від нуля і одиниці, то імовірність того, що подія A відбудеться в n незалежних повторних випробуваннях від k_1 до k_2 раз обчислюється за формулою:

$$P_n(k_1;k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,,$$

де

$$x_{k_1}=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\qquad x_{k_2}=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Доведення. За теоремою додавання імовірностей для несумісних подій маємо

$$P_n(k_1,k_2)=\sum_{k=k_1}^{k_2}P_n^k(A)\,.$$

Використаємо локальну теорему Лапласа, тоді

$$P_n(k_1,k_2)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_k)\,,$$

де $x_k=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $(k_1\le k\le k_2)$, а $\varphi(x)$ - функція Гаусса, тобто $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Розглянемо

$$\Delta x_k=x_{k+1}-x_k=\frac{(k+1)-np}{\sqrt{npq}}-\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{1}{\sqrt{npq}}\,.$$

Отримаємо

$$P_n(k_1,k_2)\approx\sum_{k=k_1}^{k_2}\varphi(x_k)\Delta x_k$$

Ця сума є інтегральною для функції $\varphi(x)$ на відрізку $x_{k_1}\le x_k\le x_{k_2}$. При $n\to\infty$, тобто при $\Delta x_k\to 0$, її границя є відповідний інтеграл.

Значить, якщо n достатньо велике, отримаємо наближену формулу

$$p_n(k_1,k_2)\approx\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}}\varphi(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{x^2}{2}}dx\,.$$

тут

$$x_{k_i}=\frac{k_i-np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Теорему доведено.

Заув. Функція $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}}dy$ наз. *функцією Лапласа.*

Формулу Лапласа можна записати, використовуючи функцію Лапласа:

$$P_n(k_1,k_2)\approx\int_{x_{k_1}}^{x_{k_2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_{k_1}}^{0}e\,dx^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_{k_2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_{k_2}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x_{k_1}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=$$

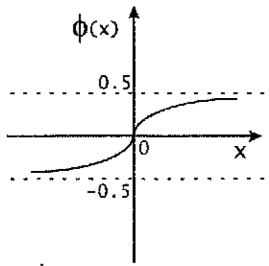
$$=\Phi(x_{k_2})-\Phi(x_{k_1}).$$

Отже, отримали формулу

$$P_n(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi(x_{k_2})-\Phi(x_{k_1}),\quad \text{де}\quad x_{k_i}=\frac{k_i-np}{\sqrt{npq}}.$$

<u>Властивості функції Лапласа.</u>

1. Функція протабульована на [0;5].
2. Якщо $x\ge5$, то $\Phi(x)\approx0.5$.
3. Функція – непарна.
4. Функція монотонно зростає, тобто якщо $x_1>x_2$, то $\Phi(x_1)>\Phi(x_2)$.



Приклад.

1. В електромережу увімкнено незалежно одну від одної 500 електролампочок, які освітлюють у вечірній час виробничий цех заводу. Імовірність того, що електролампочка в електромережі не перегорить дорівнює 0,8. Яка імовірність того, що з 500 електролампочок не перегорить не більше ніж 380 штук?

A – електролампочка не перегорить.

Шукану імовірність обчислюємо за інтегральною формалою Лапласа.

Обчислюємо значення аргумента функції Лапласа:

$$x_0=\frac{k_0-np}{\sqrt{npq}}=\frac{0-500\cdot0{,}8}{\sqrt{500\cdot0{,}8\cdot0{,}2}}=-45;$$

$$x_{380}=\frac{k_{380}-np}{\sqrt{npq}}=\frac{380-500\cdot0{,}8}{\sqrt{500\cdot0{,}8\cdot0{,}2}}=-2{,}25.$$

За таблицею знаходимо значення функції Лапласа, враховуючи, що вона є непарною:

$$\Phi(-45)\approx-0{,}5;\quad \Phi(-2{,}25)\approx-0{,}4881.$$

Тоді

$$P_{500}(0\le k\le380)\approx\Phi(-2{,}25)-\Phi(-45)=0{,}5-0{,}4881=0{,}0119.$$

2. Скільки потрібно покласти в коробку транзисторів, щоб з імовірністю, не меншою за 0,97, в ній виявилося не менше 100 стандартних. Імовірність того, що транзистор є нестандартним, дорівнює 0,01.

A – транзистор нестандартний.

Позначимо кількість транзисторів, які потрібно покласти вкоробку, через $n=100+m$. Із числа $100+m$ усіх транзисторів з імовірністю не меншою за 0,97, нестандартними можуть бути не більше m транзисторів. Використовуємо інтегральну формулу Лапласа:

$$P_{100+m}(0\le k\le m)\approx\Phi(x_m)-\Phi(x_0)\ge0{,}97.$$

Знаходимо значення аргумента функції Лапласа:

$$x_0=\frac{0-(100+m)\cdot0{,}01}{\sqrt{(100+m)\cdot0{,}01\cdot0{,}99}};$$

$$x_m=\frac{m-(100+m)\cdot0{,}01}{\sqrt{(100+m)\cdot0{,}01\cdot0{,}99}}.$$

Значення $0{,}01m$ і $0{,}01\cdot0{,}99m$ є невеликими, тому у другому виразі ними можна знехтувати. Отримуємо:

$$x_m=\frac{m-(100+m)\cdot0{,}01}{\sqrt{(100+m)\cdot0{,}01\cdot0{,}99}}=\frac{m-1}{\sqrt{100\cdot0{,}01\cdot0{,}99}}=\frac{m-1}{\sqrt{0{,}99}}.$$

Відомо, що для аргумента $\delta\ge4$ значення функції Лапласа дорівнює 0,5, отримуємо:

$$P_{100+m}(0\le k\le m)\approx\Phi(x_m)-\Phi(x_0)\approx\Gamma\left(\frac{m-1}{\sqrt{0{,}99}}\right)+0{,}5\ge0{,}97.$$

Отже,

$$\Phi\left(\frac{m-1}{\sqrt{0{,}99}}\right)\ge0{,}47.$$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо:

$$\frac{m-1}{\sqrt{0{,}99}}\ge1{,}98.$$

Звідки

$$m\ge2{,}87.$$

Отже, в коробку потрібно покласти додатково три транзистори.

6. Імовірність відхилення відносної частоти від імовірності в незалежних випробуваннях.

Теорема 5. (*Імовірність відхилення*)

Імовірність того, що в n незалежних повторних випробуваннях, в кожному із яких імовірність появи події постійна і відмінна від нуля та одиниці, відносна частота відхилиться від імовірності по абсолютній величині не більше заданого числа $\varepsilon>0$ обчислюється за формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Доведення. Розглянемо нерівність $\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon$.

$$-\varepsilon\le\frac{m}{n}-p\le\varepsilon,$$

$$-\varepsilon\le\frac{m-np}{n}\le\varepsilon.$$

Домножаємо нерівність на $\sqrt{\frac{n}{pq}}$, отримаємо

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-pq}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}.$$

Використовуємо теорему Лапласа, де

$$x_1 = -\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}, \quad x_2 = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}},$$

тоді

$$P(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Отримали

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Теорему доведено.

Приклад.

1. Імовірність того, що деталь нестандартна дорінює 0,1. Знайти імовірність того, що серед випадково відібраних 400 детелей відносна частота появи нестандартних деталей відхилиться від імовірності по абсолютній величині не більше ніж на 0,03.

   За теоремою відхилення масмо:

$$P\left(\left|\frac{m}{400} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) \approx 0{,}9544.$$

2. Імовірність того, що деталь нестандартна 0,1. Скільки деталей треба відібрати , щоб з імовірністю 0,9544 відносна частота появи нестандартних деталей серед відібраних відхилилася від імовірності p по абсолютній величині не більше, ніж на 0,03.

   За умовою маємо:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| \le 0{,}03\right) \approx 0{,}9544.$$

   Або

$$2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) \approx 0{,}9544.$$

$$\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right) \approx 0{,}4772.$$

   За таблицею значень функції Лапласа знаходимо:

$$0{,}03\sqrt{\frac{n}{0{,}09}} \approx 2.$$

   Звідки отримуємо, що

$$n=400.$$

Тема 6. Випадкові величини.

1. Класифікація випадкових величин.
2. Закони розподілу імовірностей випадкових величин.
3. Дії над дискретними випадковими величинами.

1.Класифікація випадкових величин.

Озн. *Випадковою* наз. величина, яка в результаті випробування приймає одне і тільки одне із своїх можливих значень, наперед невідоме.

Приклад.

1. Кількість влучних пострілів серед 10 зроблених.
2. Час безвідмовної роботи радіолампи.
3. Відстань, яку пролетить снаряд при пострілі.

Заув. Випадкова величина позначається великою буквою латинського алфавіту

$$X, Y, \ldots,$$

а її можливі значення – малою буквами латинського алфавіту:

$$x, y, \ldots.$$

Приклад.

1. Кількість хлопчиків серед 20 народжених дітей є величиною випадковою, яка має можливі значення: 0, 1, 2, ..., 20.
2. Похибки при вимірюванні дальності радіолокатором – випадкова величина, область значень якої $(-\infty;+\infty)$.

В першому випадкова величина приймає окремі, ізольовані можливі значення.

В другому випадку випадкова величина приймає усі значення на проміжку. Отже, випадкові величини можна поділити на дві групи:

1) дискретні;
2) неперервні.

Озн. *Дискретною випадковою величиною* наз. випадкова величина, яка приймає окремі ізольовані можливі значення з певною імовірністю.

Кількість можливих значень дискретної випадкової величини можебути *скінченною* або *нескінченною.*

Озн. *Неперервною випадковою величиною* наз. випадкова величина, яка приймає всі значення із деякого скінченного або нескінченного проміжка.

Кількість можливих значень неперервної випадкової величина – *нескінченна.*

Заув. Введене означення неперервної випадкової величини не є точним. Більш точне означення ми дамо пізніше.

2.Закони розподілу імовірностей випадкових величин.

Озн. *Законом розподілу випадкової величини* наз. співвідношення між усіма можливими значеннями випадкової величини та їх імовірностями.

Закон розподілу випадкової величини може задаватися :
- таблично,
- графічно,
- аналітично.

У разі табличної форми запису закону розподілу випадкової величини подається послідовність можливих значень випадкової величини, розміщених у порядку зростання, та відповідних їм імовірностей.

Для дискретної випадкової величини таблиця має вигляд:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Для неперервної випадкової величини таблиця має вигляд:

X	x_1-x_2	x_2-x_3	$\dots$	$x_{n-1}-x_n$
P	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}

Приклад.

1. По каналу зв'язку з перешкодами передається кодова комбінація, що складається з двох імпульсів. В результаті незалежного впливу перешкоди на ці імпульси, кожен з них може бути заглушений з імовірністю 0,4. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості заглушених перешкодами імпульсів.

A – імпульс заглушений перешкодами.

$p_1=q^2=0{,}6^2=0{,}36;$

$p_2=2pq=2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}48;$

$p_3=p^2=0{,}4^2=0{,}16$

X	0	1	2
P	0,36	0,48	0,16

2. Два кубика одночасно кидають два рази. Записати закон розподілу випадкової величини X – числа появи на обох кубиках парної кількості очок .

A – парна кількість очок на першому кубику;

B – парна кількість очок на другому кубику.

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}.$$

C – парна кількість очок на обох кубиках одночасно.

$$P(C)=P(AB)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Отримали

$$p=\frac{1}{4},\quad q=\frac{3}{4}.$$

$$p_1=C_2^0p^0q^2=1\cdot 1\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16};$$

$$p_2=C_2^1p^1q^1=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{16};$$

$$p_3=C_2^2p^2q^0=1\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot 1=\frac{1}{16}.$$

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

Заув. Оскільки випадкові події $X=x_i$ і $X=x_j$ є між собою несумісними $\left((X=x_i)\cap(X=x_j)=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\dots n\right)$ і утворюют повну групу $\left(\bigcup_{i=1}^{n}(X=x_i)=\Omega\right)$, то необхідною є умова:

$$\sum_{i=1}^{n}P(X=x_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=1,$$

яка наз. *умовою нормування*.

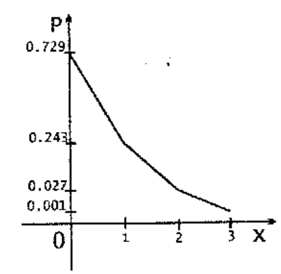
З метою наочності закон розподілу випадкової величини можна задавати **графічно**. Для цього в прямокутній системі координат будують точки (x_i, p_i), які з'єднують відрізками прямих. Отриману ламану наз. *багатокутником розподілу* або *імовірнісним багатокутником*.

Приклад.

Прилад складається із трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність того, що елемент не спрацює в даному випробуванні 0,1. Заданий закон розподілу несправцювавших елементів

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Побудувати багатокутник розподілу несправцюваваших елементів.



Закон розподілу випадкової величини може задаватися **аналітично**, тобто за допомогою формули

$$P(X=x_i)=\psi(x_i).$$

Приклад.

Імовірність появи події A в кожному із n повторних незалежних випробувань дорівнює p. Закон розподілу випадкової величини X – числа появи події в n випробуваннях задається формулою

$$p_{k+1} = P(X=k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

3. Дії над дискретними випадковими величинами.

Озн. Дискретні випадкові величини X і Y наз. *незалежними*, якщо для будь яких i, j події $X=x_i$ і $Y=y_j$ – незалежні.

Нехай випадкові величини X і Y задані своїми законами розподілу:

X	x_1	x_2	…	x_m
P	p_1	p_2	…	p_m

Y	y_1	y_2	…	y_n
P	l_1	l_2	…	l_n

1. Добуток випадкової величини на сталий множник.

Озн. *Добутком дискретної випадкової величини X на сталий множник C* наз. випадкова величина CX, можливі значення, якої дорівнюють добутку сталої C на можливі значення випадкової величини X. Імовірності можливих значень випадкової величини CX дорівнюють імовірностям відповідних можливих значень випадкової величини X.

CX	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Приклад.

В грошовій лотареї, яка проводиться серед працівників підприємства з приводу його річниці, розігрується 1000 квитків. Серед них один квиток з виграшом в 1000 грн., десять по 100 грн., сто по 1 грн. Закон розподілу виграшу для володаря одного квитка має вигляд (квитки працівники отримали безкоштовно):

X	0	1	100	1000
P	0,889	0,1	0,01	0,001

В останню мить адміністрація підприємства вирішила збільшити кожен з виграшів в три рази. Скласти закон розподілу виграшу для володаря одного квитка за новими тарифами.

За означенням добутку дискретної випадкової величини X на сталий множник достатньо domножити кожне значення x_i на $C=3$, отримуємо:

$3X$	0	3	300	3000
P	0,889	0,1	0,01	0,001

2. Сума випадкових величин.

Озн. *Сумою дискретних випадкових величин X і Y* наз. дискретна випадкова величина $X+Y$, можливі значення якої дорівнюють сумі кожного можливого значення випадкової величини X з кожним можливим значенням випадкової величини Y. Імовірності можливих значень випадкової величини $X+Y$ для незалежних випадкових величин X і Y дорівнюють добуткам імовірностей доданків. Для залежних випадкових величин X і Y – добуткам імовірностей одного доданку на умовну імовірність другого.

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	…	x_1+y_n	…	x_m+y_1	x_m+y_2	…	x_m+y_n
P	p_1l_1	p_1l_2	…	p_1l_n	…	p_ml_1	p_ml_2	…	p_ml_n

Приклад.

Дослідження роботи блоків чотирьох типів в умовах перепаду напруги показало, що імовірність безвідмовної роботи на протязі часу T кожного із типів складає відповідно 0,8; 0,9; 0,7; та 0,75. Вибираються по одному блоку кожного типу. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа блоків, які безвідмовно працюватимуть у вказаних умовах.

$\tilde{O}_i$ – число блоків i-го типу, які безвідмовно працюватимуть в умовах перепаду напруги, $^3=\overline{1,4}$.

Оскільки тип представлений тільки одним блоком, то $\tilde{O}_i$ може набирати два можливих значення: 0 (блок вийшов з ладу) і 1 (блок безвідмовно працюватиме). Отримаємо закони розподілу:

X_1	0	1
ð	0,2	0,8

X_2	0	1
ð	0,1	0,9

X_3	0	1
ð	0,3	0,7

X_4	0	1
ð	0,25	0,75

Загальне число блоків, які безвідмовно працюватимуть у вказаних умовах, складається із числа блоків кожного типу, що витримають випробування:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4.$$

Позначимо:

$$Y = X_1 + X_2, \quad Z = Y + X_3, \quad X = Z + X_4.$$

За означенням додавання випадкових величин отримуємо:

Y	0	1	2
P	0,02	0,26	0,72

Z	0	1	2	3
P	0,006	0,092	0,398	0,504

X	0	1	2	3	4
P	0,0015	0,0275	0,1685	0,4245	0,378

Запропонований метод розв'язування задачи є неєдиним.

3.Добуток випадкових величин.

Озн. *Добутком дискретних незалежних випадкових величин* X і Y наз. дискретна випадкова величина XY, можливі значення якої дорівнюють добуткам кожного можливого значення випадкової величини X на кожне можливе значення випадкової величини Y. Імовірності можливих значень випадкової величини XY дорівнюють добуткам імовірностей можливих значень співмножників.

XY	x_1y_1	x_1y_2	...	x_1y_n	...	x_my_1	x_my_2	...	x_my_n
p_i	p_1l_1	p_1l_2	...	p_1l_n	...	p_ml_1	p_ml_2	...	p_ml_n

Приклад.

Випадкові величини задані законами розподілу

X	2	5
ð	0,8	0,2

Y	1	3	6
ð	0,3	0,5	0,2

Тоді закон розподілу випадкової величини XY має вигляд:

XY	2	5	6	12	15	30
P	0,24	0,06	0,4	0,16	0,1	0,04

Тема 7. Функція розподілу імовірностей випадкової величини.

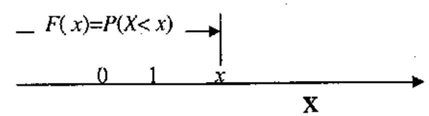
1. Інтегральна функція розподілу та її властивості.
2. Диференціальна функція розподілу та її властивості.

1. Інтегральна функція розподілу та її властивості.

Озн. *Інтегральною функцією розподілу* випадкової величини наз. функція $F(x)$, яка для кожного значення аргументу x визначає імовірність того, що випадкова величина X набере значення, менше за x, тобто:

$$F(x)=P(X<x).$$

Геометрично це означає: інтегральна функція розподілу $F(x)$ – це імовірність того, що випадкова величина набере значення, яке на числовій осі позначається точкою, що лежить ліворуч від точки x.



Озн. *Неперервною випадковою величиною* наз. випадкова величина, інтегральна функція розподілу якої неперервно диференційована.

Приклад.

Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0\,, & x\le 0{,}5;\\ x^2-x+0{,}25\,, & 0{,}5<x\le 1{,}5;\\ 1\,, & x>1{,}5.\end{cases}$$

<u>**Заув.**</u> Інтегральна функція розподілу має зміст і для дискретної випадкової величини.

Приклад.

Дискретна випадкова величина задана своїм законом розподілу

X	1	4	6
P	0,3	0,4	0,3

Знайти інтегральну функцію розподілу.

Якщо $x \le 1$, то $X< x$ – неможлива подія. Отже, для $x\le 1$ $P(X< x) = 0$.
Якщо $1< x\le 4$, то $F(x) = 0{,}3$, бо подія $X< x$ рівнозначна події $X=1$.
Якщо $4< x\le 6$, то $F(x)=P(X< x) =P(X=1)+P(X=4)=0{,}3+0{,}4=0{,}7$.
Якщо $x > 6$, то $F(x) =1$, бо подія $X< x$ є достовірною.

Отримали:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}3, & 1<x\le 4;\\ 0{,}7, & 4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Властивості інтегральної функції розподілу імовірностей випадкової величини.

1. Значення інтегральної функції належать відрізку [0;1]:

$0\le F(x)\le 1$.

Доведення. Ця властивість є наслідком означення інтегральної функції.

2. Інтегральна функція $F(x)$ є неспадаючою функцією, тобто

$F(x_2)\ge F(x_1)$, якщо $x_2>x_1$.

Доведення. Нехай $x_2>x_1$.

Розглянемо подію $X<x_2$. Її можна поділити на дві несумісні події:

1) $X<x_1$ з імовірністю $P(X<x)$
2) $x_1\le X<x_2$ з імовірністю $P(x_1\le X<x_2)$.

За теоремою добутку маємо

$$P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X<x_2).$$

Тоді $$P(X<x_2)-P(X<x_1)=P(x_1\le X<x_2)$$

або $$F(x_2)-F(x_1)=P(x_1\le X<x_2).$$

Імовірність є число невід'ємне, отже $F(x_2)-F(x_1)\ge 0$.

Або $$F(x_2)\ge F(x_1).$$

3. Якщо можливі значення випадкової величини належать проміжку (a, b), то

$F(x)=0$, якщо $x\le a$;

$F(x)=1$, якщо $x\ge b$.

Доведення. 1)Нехай $x_1\le a$. Тоді подія $X<x_1$ – неможлива, тому що за умовою випадкова величина значень менших за x_1 не приймає. Отже, імовірність $P(X<x_1)=0$.

2)Нехай $x_2\ge b$. Тоді подія $X<x_2$ – достовірна, тому що всі можливі значення X менші за x_2. Отже, імовірність $P(X<x_2)=1$.

Наслідки із властивостей інтегральної функції:

1. ***Імовірність того, що випадкова величина X набере значення з проміжка (a, b), дорівнює приросту інтегральної функції на цьому проміжку.***

$P(a\le X<b)=F(b)-F(a)$.

Доведення. Ця властивість є наслідком формули $F(x_2)-F(x_1)=P(x_1\le X<x_2)$ із доведення властивості 2, якщо покласти $x_2=b$ і $x_1=a$.

2. ***Імовірність того, що неперервна випадкова величина X приймає одне визначене значення, дорівнює нулю.***

Доведення. Нехай в формулі $P(a\le X<b)=F(b)-F(a)$ $a=x_1$, $b=x_1+\Delta x$.

Отримаємо

$$P(x_1\le X<x_1+\Delta x)=F(x_1+\Delta x)-F(x_1).$$

Нехай Δx прямує до нуля. X – неперервна випадкова величина, тоді і функція $F(x)$ – неперервна. В силу неперервності $F(x)$ в точці x_1 різниця $F(x_1+\Delta x)-F(x_1)$ також буде прямувати до нуля. Значить $P(X=x_1)=0$.

3. ***Якщо можливі значення неперервної випадкової величини розташовані на усій числовій осі x, то справедливі співвідношення***

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad \lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

Приклад.

1. Випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1;\\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}, & -1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина набере значення, що належить проміжку (0;2).

$$P(0<X<2)=F(2)-F(0)=\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

2.Задана випадкова величина

X	1	2	3	4	5
P	0,06	0,056	0,053	0,05	0,781

Знайти її інтегральну функцію розподілу. А також використовуючи інтегральну функцію розподілу знайти імовірність того, що випадкова величина набере значення від 1 до 3.

Складаємо інтегральну функцію розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ 0{,}06, & 1<x\le 2;\\ 0{,}116, & 2<x\le 3;\\ 0{,}169, & 3<x\le 4;\\ 0{,}219, & 4<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Знаходимо імовірність того, що $1\le x<3$.

$$P(1\le x<3)=F(3)-F(1)=0{,}116-0=0{,}116.$$

Графік інтегральної функції розподілу.

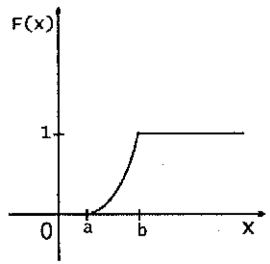
Графік інтегральної функції розподілу імовірностей неперервної випадкової величини:

1) міститься в полосі, обмеженій прямими $y=0$ і $y=1$(за першою властивістю).

2) при зростанні x в проміжку (a, b), в якому містяться усі можливі значення випадкової величини, графік "підіймається догори" (за другою властивістю).

3) при $x \leq a$ ординати графіка дорівнюють 0; при $x \geq b$ ординати графіка дорівнюють 1 (за третьою властивістю).

Таким чином схематичний графік інтегральної функції розподілу імовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

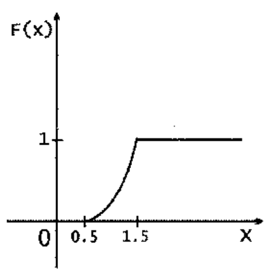


Приклад.

1. Побудувати графік інтегральної функції розподілу неперервної випадкової величини

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x\leq 0{,}5\\ x^2-x+0{,}25 & , 0{,}5<x\leq 1{,}5\\ 1 & , x>1{,}5\end{cases}$$

Графік заданої інтегральної функції має вигляд:



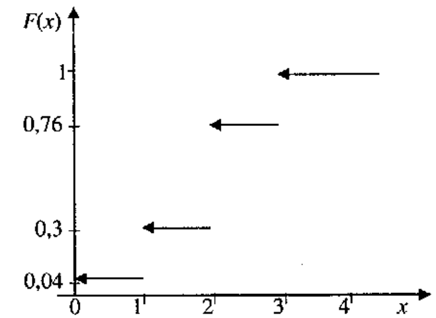
2. Побудувати графік інтегральної функції розподілу дискретної випадкової величини

X	0	1	2	3
P	0,04	0,26	0,46	0,24

Інтегральна функція заданої дискретної випадкової величини має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ 0{,}04, & 0<x\leq 1;\\ 0{,}3, & 1<x\leq 2;\\ 0{,}76, & 2<x\leq 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Графік заданої випадкової величини має вигляд:



2. Диференціальна функція розподілу.

Озн. *Диференціальною функцією розподілу* (*щільністю*) наз. перша похідна від інтегральної функції розподілу

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=F'(x).$$

Заув. Із означення диференціальної функції випливає, що інтегральна функція є первісною для функції диференціальної.

Приклад.

Знайти диференціальну функцію розподілу, якщо випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ \frac{1}{2}(1-\cos x), & 0<x\leq \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Шукана диференціальна функція розподілу має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Імовірнісний зміст диференціальної функції розподілу.

Нехай $F(x)$ – інтегральна функція розподілу імовірностей неперервної випадкової величини X. За означенням диференціальної функції $f(x)=F'(x)$, або

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}.$$

Різниця $F(x+\Delta x)-F(x)$ визначає імовірність того, що X набере значення із проміжка $(x, x+\Delta x)$.

Отже, диференціальна функція визначає щільність розподілу імовірності для кожної точки x.

Відомо, що приріст функції наближено дорівнює диференціалу функції

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx dF(x)$$

або

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx F'(x)\,dx.$$

$$F'(x)=f(x) \quad \text{i} \quad dx=\Delta x,$$

Тоді

$$F(x+\Delta x)-F(x)\approx f(x)\Delta x.$$

Імовірнісний зміст цього рівняння полягає в наступному: *імовірність того, що випадкова величина набере значення із проміжка* $(x,\ x+\Delta x)$, *наближенно дорівнює добутку щільності імовірності в точці x на довжину інтервалу* Δx.

Геометрично це означає: імовірність того, що випадкова величина набере значення із проміжка $(x,\ x+\Delta x)$, наближенно дорівнює площі прямокутника з основою Δx і висотою $f(x)$.

Властивості диференціальної функції розподілу.

1. Диференціальна функція розподілу – невід'ємна

$$f(x)\ge 0.$$

Доведення. Інтегральна функція є не спадаючою, отже, її похідна – невід'ємна.

2. Невласний інтеграл від диференціальної функції в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Доведення. Даний невласний інтеграл виражає імовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина належить інтервалу $(-\infty;+\infty)$. Така подія є достовірною, отже, імовірність її дорівнює 1.

<u>Заув.</u> Геометрично вказані властивості означають:

1) точки, які належать графіку диференціальної функції, розміщені над віссю x, або на цій осі;
2) вся площа криволінійної трапеції, обмеженої віссю x і кривою розподілу, дорівнює 1.

Приклад.

Випадкова величина задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\frac{a}{e^{x}+e^{-x}}$$

Знайти параметр a.

За другою властивістю диференціальна функція повинна задовільняти умову:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1.$$

Тому необхідно, щоб виконувалась рівність

$$a\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}=1.$$

Звідки

$$a=\frac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}=\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}+\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{dx}{e^{-x}+e^{x}}=\lim_{b\to-\infty}\int_{b}^{0}\frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}+\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a}\frac{e^{x}dx}{1+e^{2x}}=$$

$$=\lim_{b\to-\infty}\left(-\operatorname{arctg} e^{b}\right)+\lim_{a\to\infty}\left(\operatorname{arctg} e^{a}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Таким чином шуканий параметр:

$$a=\frac{2}{\pi}.$$

3. Імовірність того, що неперервна випадкова величина x набере значення із проміжка (a, b), дорівнює визначеному інтегралу від диференціальної функції розподілу, взятому у межах від a до b:

$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Доведення. Застосуємо співвідношення

$$P(a\le X<b)=F(b)-F(a).$$

За формулою Ньютона- Лейбніца

$$F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}F'(x)dx=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

$$P(a\le X<b)=P(a<X<b),$$

отримуємо

$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b}f(x)dx.$$

Геометрично отриманий результат означає: імовірність того, що неперервна випадкова величина набере значення із проміжка (a, b), дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої віссю x, кривою розподілу $f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$.

Приклад.

Випадкова величина задана диференціальною функцією розподілу:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 2x, & 0<x\le 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в результаті випробування випадкова величина набере значення із проміжка (0,5; 1).

$$P(0{,}5<X<1)=\int_{0,5}^{1}2x\,dx=x^2\Big|_{0,2}^{1}=0{,}75.$$

4. ***За відомою диференціальною функцією розподілу інтегральна функція розподілу визначається за формулою***

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

Доведення. Інтегральна функція розподілу – це імовірність того, що випадкова величина набере значення , менше за x

$$F(x)=P(X<x).$$

Нерівність $X<x$ можна записати у вигляді $-\infty<X<x$.
Отже,

$$F(x)=P(-\infty<X<x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx.$$

Що і треба було довести.

Приклад.

Знайти інтегральну функцію за заданою диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Якщо $x\le a$, то $f(x)=0$. Отже, $F(x)=0$.

Якщо $a<x\le b$, то $f(x)=\dfrac{1}{b-a}$. Тоді

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x-a}{b-a}.$$

Якщо $x>b$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a}0dx+\int_{a}^{b}\frac{dx}{b-a}+\int_{b}^{x}0dx=\frac{b-a}{b-a}=1.$$

Отримали інтегральну функцію розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Тема 8. Числові характеристики випадкових величин.

1. Математичне сподівання та його властивості.
2. Дисперсія та її властивості.
3. Середнє-квадратичне відхилення.
4. Числові характеристики числа появи події в незалежних випробуваннях.
5. Початкові та центральні моменти.
6. Асиметрія і ексцес.

1. Математичне сподівання та його властивості.

Озн. *Математичним сподіванням дискретної випадкової величини* наз. сума попарних добутків усіх її можливих значень на їх імовірності.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i .$$

Заув. 1. Із означення можна зробити висновок, що математичне сподівання дискретної випадкової величини є невипадкова постійна величина.

2. Математичне сподівання не зміниться, якщо таблицю значень дискретної випадкової величини поповнити кінцевим числом будь-яких чисел, враховуючи, що їх імовірності дорівнюють нулю.

Озн. *Математичним сподіванням неперервної випадкової величини* наз. величина

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx,$$

якщо випадкова величина приймає значення на всій множині дійсних чисел і

$$M(X)=\int_{a}^{b}xf(x)dx,$$

якщо випадкова величина приймає значення на проміжку (a, b).

Приклад.

1. Знайти математичне сподівання випадкової величини, яка задана своїм законом розподілу

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

Математичне сподівання шукаємо за означенням:

$M(X)$=3·0,1+5·0,6+2·0,3=3,9.

2. Обчислити математичне сподівання неперервної випадкової величини

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Знаходимо спочатку диференціальну функцію розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{1}{4}, & 0<x\le 4;\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Тоді математичне сподівання обчислюємо за формулою

$$M(X)=\int_0^4 xf(x)dx=\left.\frac{x^2}{8}\right|_0^4=2.$$

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання появи події в одному випробуванні дорівнює імовірності цієї події.

Доведення. Задана випадкова величина має закон розподілу

X	1	0
p	p	$1-p$

Тоді $M(X)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$.

2. Математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній величині.

$$M(C)=C.$$

Доведення. Сталу C можна розглядати як дискретну випадкову величину, яка може приймати тільки одне можливе значення C з імовірністю 1. Тоді за першою властивістю

$$M(C)=C\cdot 1=C.$$

3. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання.

$$M(CX)=CM(X).$$

Доведення. Для дискретної випадкової величини маємо:

$$M(CX)=\sum_{i=1}^{n}Cx_i p_i=C\sum_{i=1}^{n}x_i p_i=CM(X).$$

Для неперервної випадкової величини:

$$M(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty}Cxf(x)dx=C\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=CM(X).$$

4. Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх імовірностей.

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

Доведення. Для спрощення доведення, розглянемо випадок, коли дискретні випадкові величини приймають по два можливі значення. Нехай випадкові величини X і Y задані своїми законами розподілу:

X	x_1	x_2
P	p_1	p_2

Y	y_1	y_2
P	l_1	l_2

Складаємо закон розподілу випадкової величини XY:

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
P	p_1l_1	p_1l_2	p_2l_1	p_2l_2

За означенням математичного сподівання маємо:

$$Ì\ (XY)=x_1y_1p_1l_1+x_1y_2p_1l_2+x_2y_1p_2l_1+x_2y_2p_2l_2=x_1p_1(y_1l_1+y_2l_2)+x_2p_2(y_1l_1+y_2l_2)=$$
$$=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1l_1+y_2l_2)=M(X)M(Y).$$

5.Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Доведення. Для спрощення доведення, розглянемо випадок, коли дискретні випадкові величини приймають по два можливі значення (див. властивість 4). Складаємо закон розподілу випадкової величини $X+Y$:

$X+Y$	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_1l_1	p_1l_2	p_ml_2	p_ml_2

За означенням математичного сподівання маємо:

$$M(X+Y)=(x_1+y_1)p_1l_1+(x_1+y_2)p_1l_2+(x_2+y_1)p_2l_1+(x_2+y_2)p_2l_2=$$
$$=x_1p_1(l_1+l_2)+x_2p_2(l_1+l_2)+y_1l_1(p_1+p_2)+y_2l_2(p_1+p_2)=M(X)+M(Y).$$

Наслідки із властивостей математичного сподівання.

1. Математичне сподівання добутку декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань.

$$M(X_1X_2...X_n)=M(X_1)M(X_2)..M(X_n).$$

2. Математичне сподівання суми декількох декількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює дорівнює сумі їх математичних сподівань.

$$M(X_1+X_2+...+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n).$$

Імовірнісний зміст математичного сподівання.

Нехай проведено n випробувань, у яких випадкова величина X прийняла m_1 раз значення x_1, m_2 раз значення x_2, m_k раз значення x_k. Отже,

$$m_1+m_2+\ldots+m_k=n.$$

Тоді сума всіх значень, прийнятих X, дорівнює

$$x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k.$$

Знаходимо середнє арифметичне всіх значень, які прийняла випадкова величина X, для цього поділимо отриману суму на загальне число випробувань:

$$\overline{X}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+...+x_km_k}{n},$$

або

$$\overline{X}=x_1\frac{m_1}{n}+x_2\frac{m_2}{n}+...+x_k\frac{m_k}{n}.$$

Відношення $\frac{m_1}{n}$ є відносною частотою W_1 значення x_1, $\frac{m_2}{n}$ – відносна частота значення x_2 і т. д. Запишемо отримане співвідношення у вигляді:

$$\overline{X}=x_1W_1+x_2W_2+\ldots+x_kW_k.$$

Нехай кількість випробувань достатньо велика. Тоді відносна частота наближено дорівнює імовірності появи події. Отримаємо

$$W_1\approx p_1,\quad \ldots,\quad W_k\approx p_k.$$
$$\overline{X}=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_kp_k$$

Права частина рівності наближено дорівнює математичному сподіванню $M(X)$. Отже,

$$\overline{X}\approx M(X).$$

Імовірнісний зміст отриманого результату полягає у наступному: *математичне сподівання дискретної випадкової величини наближено дорівнює середньому арифметичному спостерігаємих значень випадкової величини.*

<u>Заув.</u> Математичне сподівання характеризує *розміщення розподілу*, його називають *центром розподілу*.

2. Дисперсія та її властивості.

Озн. *Відхиленням* наз. різниця між випадковою величиною X та її математичним сподіванням.

Позначається: $X-M(X)$.

<u>Заув.</u> Математичне сподівання відхилення дорівнює нулю.

Озн. *Дисперсією випадкової величини* X наз. математичне сподівання квадрату її відхилення

$$D(X)=M(X-M(X))^2.$$

Для дискретної випадкової величини

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2p_i.$$

Для неперервної випадкової величини

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2f(x)dx,$$

якщо випадкова величина приймає значення на всій множині дійсних чисел і

$$D(X)=\int_a^b (x-M(X))^2 f(x)dx,$$

якщо випадкова величина приймає значення на проміжку (a, b).

Приклад.

1. Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини:

X	4	10	20
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Для обчислення дисперсії треба знати математичне сподівання даної дискретної випадкової величини:

$$M(X) = 4\cdot\frac{1}{4}+10\cdot\frac{2}{4}+20\cdot\frac{1}{4}=11$$

Для зручності подальших обчислень запишемо закон розподілу дискретної випадкової величини $(X\text{-}M(X))^2$:

$(X-M(X))^2$	$(4-11)^2$	$(10-11)^2$	$(20-11)^2$
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$D(X)=M(X-M(X))^2= 7^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{2}{4}+9^2\cdot\frac{1}{4}=33.$$

2. Обчислити дисперсію неперервної випадкової величини:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

Знаходимо диференціальну функцію заданої випадкової величини

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{1}{4}, & -2<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Обчислюємо математичне сподівання

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_{-2}^{2}\frac{1}{4}xdx=\left.\frac{x^2}{8}\right|_{-2}^{2}=0.$$

Обчислюємо дисперсію

$$D(X)=\int_{-2}^{2}x^2 f(x)dx=\int_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\left.\frac{x^3}{12}\right|_{-2}^{2}=\frac{4}{3}.$$

Заув. *Дисперсія визначає як розкидані значення випадкової величини відносно її математичного сподівання (середнього значення).*

Властивості дисперсії.

1.Дисперсія постійної величини дорівнює нулю.

$$\mathbf{D(C)=0.}$$

Доведення. $D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(0)=0.$

2.Постійний множник можна виносити за знак дисперсії, підносячи його до квадрату.

$$\mathbf{D(CX)=C^2D(X).}$$

Доведення. $D(CX)=M(CX-M(CX))^2=M(C^2(X-M(X))^2=C^2M(X-M(X))^2=C^2D(X).$

3. Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрату випадкової величини та квадратом її відхилення.

$$\mathbf{D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.}$$

Доведення. $D(X)=M(X-M(X))^2=M(X^2-2XM(X)+M^2(X))=M(X^2)-2M(X)M(X)+ +M^2(X)=$
$=M(X^2)-2M^2(X)+M^2(X)=M(X^2)-M^2(X).$

4.Дисперсія суми двох незалежних величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$\mathbf{D(X+Y)=D(X)+D(Y).}$$

Доведення. $D(X+Y)=M((X+Y)^2)-M^2(X+Y)=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$
$=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-M^2(X)-2M(X)M(Y)-M^2(Y)=$
$=[M(X^2)-M^2(X)]+[M(Y^2)-M^2(Y)]=D(X)+D(Y).$

Наслідок із властивостей дисперсії.

Дисперсія суми кількох взаємно незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих величин.

$$D(X_1+X_2+\ldots+X_n)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Приклад.

1. Закон розподілу випадкової величини X задано таблицею

X	-4	-2	1	2	4	6
P	0,1	0,2	0,3	0,2	0,1	0,1

Обчислити її дисперсію за розрахунковою формулою.

Маємо:

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2p_i-\left(\sum_{i=1}^{6}x_ip_i\right)^2.$$

$$M(X)=-4\cdot 0{,}1-2\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+2\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}1+6\cdot 0{,}1=0{,}9.$$

$$M(X^2)=16\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}2+16\cdot 0{,}1+36\cdot 0{,}1=8{,}7.$$

$$D(X)=8{,}7-(0{,}9)^2=7{,}89.$$

2. Довести: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Використовуємо властивості дисперсії:

$$D(X-Y)=D(X+(-Y))=D(X)+D(-Y)=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y).$$

3. Середнє квадратичне відхилення.

Озн. *Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини* X наз. корінь квадратний із її дисперсії.

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}\,.$$

Заув. Середнє-квадратичне відхилення часто використовують для визначення розсіювання значень випадкової величини відносно її математичного сподівання (середнього значення).

Теорема. Середнє-квадратичне відхилення суми скінченного числа взаємно-незалежних випадкових величин дорівнює кореню квадратному із суми квадратів середніх квадратичних відхилень цих величин.

$$\sigma(X_1+X_2+\ldots+X_n)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\sigma^2(X_2)+\ldots+\sigma^2(X_n)}\,.$$

Доведення. Позначимо через X суму заданих взаємно-незалежних випадкових величин

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

Дисперсія суми кількох взаємно-незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій доданків

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Тоді
$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}\,,$$

або остаточно
$$\sigma(X)=\sqrt{\sigma^2(X_1)+\ldots+\sigma^2(X_n)}\,.$$

Теорему доведено.

4. Числові характеристики появи події в незалежних випробуваннях.

Теорема. Математичне сподівання появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному із яких імовірність p появи події постійна, дорівнює добутку кількості випробувань на імовірність появи події в кожному випробуванні.

$$M(X)=np.$$

Доведення. Загальна кількість X появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює сумі появи події в окремих випробуваннях. Тому, якщо X_1 – кількість появи події в першому випробуванні, X_2 – в другому, ... , X_n – в n, то загальна кількість появи події

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n.$$

$$M(X)=M(X_1+X_2+\ldots+X_n)=M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n).$$

Математичне сподівання появи події в одному випробуванні дорівнює імовірності появи події

$$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=p.$$

Тоді
$$M(X)=np.$$

Теорему доведено.

Приклад.

Імовірність влучання при одному пострілі p=0,6. Знайти математичне сподівання загального числа влучань, якщо усього буде зроблено 10 пострілів.

$$M(X)=np=10\cdot0{,}6=6.$$

Отже, середня кількість влучних пострілів становить 6.

Теорема. Дисперсія появи події A в n незалежних випробуваннях, в кожному із яких імовірність p появи події постійна, дорівнює добутку кількості випробувань на імовірності появи і непояви події в одному випробуванні.

$$D(X)=npq.$$

Доведення. Загальна кількість появи події в усіх випробуваннях дорівнює сумі кількості появи події в окремих випробуваннях

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

де X_i – кількість появи події в i-му випробуванні.

Величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – незалежні, отже,

$$D(X)=D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n).$$

Обчислюємо дисперсію випадкової величини X_i. За розрахунковою формулою маємо:

$$D(X_i)=M(X_i^2)-M^2(X_i).$$

$$M(X_i)=p.$$

$$M(X_i^2)=1^2\cdot p+0\cdot q=p$$

Отримуємо:

$$D(X_i)=p-p^2=p(1-p)=pq.$$

Тоді
$$D(X)=npq.$$

Теорему доведено.

Приклад.

Проводять 10 незалежних випробувань, в кожному із яких імовірність появи події постійна і дорівнює 0,6. Знайти дисперсію випадкової величини X – кількості появи події в цих випробуваннях.

$$D(X)=npq=10\cdot0{,}6\cdot0{,}4=2{,}4.$$

5.Початкові та центральні моменти.

Заув. Початкові та центральні моменти є узагальненими числовими характеристиками випадкових величин.

Озн. *Початковим моментом k-го порядку* випадкової величини X наз. математичне сподівання величини X^k

$$\nu_k=M(X^k)\qquad(k=1,2,3,\ldots)\,.$$

Для дискретної випадкової величини

$$\nu_k=\sum_{i=1}^{n}x_i^k p_i\,.$$

Для неперервної випадкової величини

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^k f(x)dx\,,$$

якщо випадкова величина приймає значення на всій множині дійсних чисел і

$$M(X)=\int_a^b x^k f(x)dx\,,$$

якщо випадкова величина приймає значення на проміжку (a, b).

Заув. Пошук другого, третього і т.д. початкових моментів є доцільним, якщо випадкова величина приймає велике значення з малою імовірністю, бо дозволяє "посилити вплив" цих великих, але малоімовірних можливих значень.

Приклад. Задана дискретна випадкова величина X

X	1	2	5	100
P	0,6	0,2	0,19	0,01

Обчислимо її початкові моменти першого та другого порядків:

$$M(X) = 1\cdot 0{,}6 + 2\cdot 0{,}2 + 5\cdot 0{,}19 + 100\cdot 0{,}01 = 2{,}95;$$

$$M(X^2) = 1\cdot 0{,}6 + 4\cdot 0{,}2 + 25\cdot 0{,}19 + 10000\cdot 0{,}01 = 106{,}15.$$

Як видно значення $M(X^2)$ значно більше $M(X)$. Це пояснюється тим, що після того, як значення випадкової величини X піднесли до квадрату, можливе значення $x=100$, стало рівним 10000, тобто значно збільшилося.

Озн. *Центральним моментом k-го порядку* випадкової величини X наз. математичне сподівання величини $(X-M(X))^k$

$$\mu_k = M\ (X-M(X))^k \qquad (k=1,2,3,...)$$

Для дискретної випадкової величини

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^k p_i\,.$$

Для неперервної випадкової величини

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^k f(x)dx\,,$$

якщо випадкова величина приймає значення на всій множині дійсних чисел і

$$M(X) = \int_{a}^{b}(x-M(X))^k f(x)dx\,,$$

якщо випадкова величина приймає значення на проміжку (a, b).

Заув. Моменти п'ятого порядку і вище використовуються рідко.

6.Асиметрія і ексцес.

Заув. Третій центральний момент характеризує асиметрію закону розподілу випадкової величини. Якщо він дорівнює нулю, то випадкова величина X розподілена симетрично відносно її математичного сподівання.

Озн. *Коефіцієнтом асиметрії* випадкової величини наз. величина

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Озн. *Ексцесом* випадкової величини наз. величина

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Заув. 1. Ексцес характеризує плосковершинність або гостровершинність диференціальної функції розподілу імовірностей випадкової величини.

2. Для нормального закону розподілу (який розглянемо пізніше) виконується рівність

$$\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3,$$

отже, ексцес дорівнює нулю. Саме тому в означенні віднімається число 3.

Тема 9. Основні закони розподілу випадкових величин.

1. Біноміальний закон розподілу імовірностей.
2. Пуассонівський закон розподілу імовірностей.
3. Геометричний закон розподілу імовірностей.
4. Рівномірний закон розподілу імовірностей.
5. Гіпергеометричний закон розподілу імовірностей.
6. Нормальний закон розподілу імовірностей.
7. Показниковий закон розподілу імовірностей.

1.Біноміальний закон розподілу імовірностей.

Озн. *Біноміальним* наз. закон розподілу імовірностей дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних випробуваннях, в кожному із яких імовірність появи події p постійна.

Імовірність можливих значень випадкової величини X при цьому обчислюють за формулою Бернуллі

$$P_n^k(A) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Задана формула є аналітичним виразом біноміального закону розподілу.

Заув. Закон наз біноміальним тому, що праву частину формули можна розглядати, як загальний член розкладу бінома Ньютона

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1}p^{n-1}q + ... + C_n^0 q^n.$$

Табличне задання біноміального закону розподілу має вигляд:

X	0	1	2	...	N
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

Заув. Для Біноміального розподілу $M(X) = np$, $D(X) = npq$.

Приклад.

1. По каналу зв'язку передається повідомлення за допомогою кода, що складається з двох символів. Імовірність отримання першого символу становить $\frac{2}{3}$. Передають чотири символи. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості отримання першого символу.

   A – отриманий перший символ.

   Можливі значення кількості отримання першого символу: 0, 1, 2, 3, 4. Їх імовірності визначаємо за формулою Бернуллі.

$$P_4^0(A) = C_4^0 p^0 q^4 = 1\cdot 1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81},$$

$$P_4^1(A) = C_4^1 p^1 q^3 = 4\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81},$$

$$P_4^2(A) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81},$$

$$P_4^3(A) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} = \frac{32}{81},$$

$$P_4^4(A)=C_4^4p^4q^0=1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot 1=\frac{16}{81}.$$

Отже, шуканий закон розподілу має вигляд:

X	0	1	2	3	4
p	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

2. В партії резисторів стандартні становлять 95%. Випадковим чином з партії беруть 50 резисторів. Визначити числові характеристики дискретної випадкової величини X – числа появи стандартних резисторів серед 50 навмання узятих.
   A – резистор стандартний.
   За умовою p=0,95, q=0,05, n=50. Як відомо числові характеристики числа появи події в незалежних повторних випробуваннях обчислюються за формулами:
   $$M(X)=np=50\cdot 0{,}95=47{,}5;$$
   $$D(X)=npq=50\cdot 0{,}95\cdot 0{,}05=2{,}375;$$
   $$\sigma(X)=\sqrt{npq}=\sqrt{2{,}375}\approx 1{,}54.$$

2.Пуассонівський закон розподілу імовірностей.

Озн. *Пуассонівським* наз. закон розподілу імовірностей дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних повторних випробуваннях, в кожному із яких імовірноість появи події постійна, якщо число випробувань велике, а імовірність настання події в одному випробуванні мала на стільки, що добуток $np=\lambda$ також малий. Імовірність появи можливого значення X=k обчислюють за формулою Пуассона

$$P_n^k(A)=\frac{\lambda^k}{k}e^{-\lambda},\ \text{де } \lambda=np.$$

Табличне задання пуассонівського закону розподілу має вигляд:

X	0	1	2	...	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{1}{2!}\lambda^2e^{-\lambda}$	...	$\frac{1}{n!}\lambda^ne^{-\lambda}$

Заув. Для Пуассонівського розподілу $M(X)=np$, $D(X)=M(X)=np$.

Приклад.

1. Прилад має 1000 мікроелементів, які працюють незалежно один від одного. Імовірність того, що мікроелемент вийде з ладу під час роботи приладу, є величиною сталою і дорівнює 0,004. Визначити середню кількість мікроелементів, які можуть вийти з ладу під час роботи приладу.
   Випадкова величина є цілочисловою і має пуассовівський розподіл. Отже,
   $$M(X)=np=1000\cdot 0{,}004=4.$$

2. На телефонну станцію на протязі визначеної години потрапляє в середньому 30 викликів. Знайти імовірність того, що на протязі хвилини потрапить не більше двох викликів.
   Математичне сподівання кількості викликів за одну хвилину становить
   $$M(X)=np=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$
3. Імовірність того, що па протязі хвилини потрапить не більше двох викликів дорівнює сумі:
   $$P(k=0)+P(k=1)+P(k=2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{(1/2)^2}{2!}\right)\approx 0{,}98.$$

3.Геометричний закон розподілу імовірностей.

Озн. *Геометричним* наз. закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в n незалежних повторних випробуваннях, в кожному із яких імовірність появи події постійна, якщо імовірності її можливих значень обчислюються за формулою
$$P_n^k=pq^{k-1}.$$

Табличне задання геометричного закону розподілу має вигляд:

X	1	2	3	4	...	k	...
P	p	qp	q^2p	q^3p	...	$q^{k-1}p$	...

Заув. 1. Закон розподілу наз. геометричним тому, що використовується формула суми нескінченної геометричної прогресії
$$\sum_{i=1}^{\infty}p_i=p+pq+pq^2+...=p(1+q+q^2+...)=p\frac{1}{1-q}=p\frac{1}{p}=1.$$

Заув. 2. Для геометричного закону розподілу $M(X)=\frac{1}{p}$, $D(X)=\frac{q}{p^2}$.

Приклад.

Радіостанція заради встановлення зв'язку надсилає один за одним з деякими проміжками позивні сигнали до отримання відповіді. Імовірність того, що позивний сигнал пройде і відповідь буде отримана, становить 0,2. Побудувати закон розподілу і знайти середню кількість позивних сигналів до втановлення двостороннього зв'язку.

X	1	2	3	4	...
P	0,2	$0{,}8\cdot 0{,}2$	$0{,}8^2\cdot 0{,}2$	$0{,}8^3\cdot 0{,}2$	...

Середня кількість позивних сигналів до втановлення двостороннього зв'язку дорівн.є математичному сподіванню:
$$M(X)=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}2}=5.$$

4.Рівномірний закон розподілу імовірностей.

Озн. Розподіл імовірностей неперервної випадкової величини наз. *рівномірним*, якщо на проміжку, якому належать усі можливі значення випадкової величини, диференціальна функція розподілу має постійні значення.

Приклад.

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a;\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Озн. *Рівномірним* наз. закон розподілу дискретної випадкової величини, якщо імовірності її можливих значень обчислюються за формулою

$$P_n^k=\frac{1}{n}.$$

Табличне задання рівномірного закону розподілу має вигляд:

X	0	1	2	...	n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	$\frac{1}{n}$

Заув. Для рівномірного розподілу $M(X)=\dfrac{n+1}{2}$, $D(X)=\dfrac{n^2-1}{12}$.

Приклад.

У зв'язці є п'ять ключів, з яких тільки один підходить до замка. Скласти закон розподілу числа ключів, що випробовуються при відкриванні замка, якщо ключ, що був у випробуванні, у натупних випробуваннях участі не бере.

A_i – i-тий ключ відкриває замок.

$p_1=P(A_1)=\frac{1}{5}$;

$p_2=P(\overline{A_1}A_2)=\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$;

$p_3=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$;

$p_4=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$;

$p_5=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}A_5)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{5}$.

X	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

5.Гіпергеометричний закон розподілу імовірностей

Озн. *Гіпергеометричним* наз. закон розподілу дискретної випадкової величини, якщо імовірності її можливих значень обчислюються за формулою

$$P_n^k=\frac{C_l^k C_{n-l}^{m-k}}{C_n^m}.$$

Табличне задання гіпергеометричного закону розподілу має вигляд:

X	0	1	2	...	m=min(n, n_1)
P	$\frac{C_{n-l}^m}{C_n^m}$	$\frac{C_l^1 C_{n-l}^{m-1}}{C_n^m}$	$\frac{C_l^2 C_{n-l}^{m-1}}{C_n^m}$	...	$\frac{C_l^m}{C_n^m}$

Заув. Для гіпергеометричного розподілу $M(X)=\dfrac{l}{n}$, $D(X)=\sqrt{\dfrac{l(n-l)m(n-m)}{n^2(n-1)}}$.

Приклад.

В ящику міститься 10 однотипних деталей, із них 7 стандартних. Навмання із ящика беруть 4 деталі. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа стандартних деталей серед взятих.

Задана випадкова величина має гіпергеометричний закон розподілу:

X	1	2	3	4
P	$\frac{C_7^1C_3^3}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^2C_3^2}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^3C_3^1}{C_{10}^4}$	$\frac{C_7^4}{C_{10}^4}$

або

X	1	2	3	4
P	$\frac{7}{210}$	$\frac{63}{210}$	$\frac{105}{210}$	$\frac{35}{210}$

6.Нормальний закон розподілу імовірностей

Озн. *Нормальним* наз. розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, диференціальна функція розподілу імовірностей якого має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Заув. 1.Нормальний закон розподілу задається двома параметрами: a,σ.

2. Параметр a є математичним сподіванням нормально розподіленої випадкової величини.

$$M(X)=a.$$

3. Параметр σ є середнім квадратичним відхиленням нормально розподіленої випадкової величини.

$$\sigma(X)=\sigma.$$

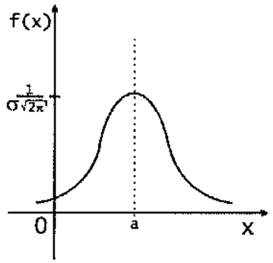
Властивості функції $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

1. Визначена на множині дійсних чисел.
2. Множина значень – усі додатні дійсні числа.
3. Вісь Ox – горизонтальна асимптота графіка функції.
4. Функція має екстремум в точці

$$x=a\ ;\ y=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

5. Графік функції симетричний відносно прямої $x=a$.
6. Точки перегину

$$(a-\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})\text{ і }(a+\sigma;\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}).$$



Заув. 1.Зміна величини параметра a не змінює форми кривої, тільки приводить до зміщення її повздовж осі Ox: праворуч, коли a зростає і ліворуч, коли a спадає.

2.Зміна параметра σ змінює форму кривої. Із зростанням σ крива стає більш пологою, тобто притискається до осі Ox. При спаданні σ крива стає більш гострою, витягається в додатньому напрямку осі Ox.

Теорема 1. Імовірність попадання в заданий інтервал $(\alpha;\ \beta)$ нормально-розподіленої випадкової величини обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-\alpha}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$

Доведення. Імовірність попадання в заданий проміжок для неперервної випадкової величини обчислюється за формулою

$$P(\alpha<X<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Зробимо заміну $z=\frac{x-a}{\sigma}$. Тоді межі інтегрування зміняться. Якщо $x=\alpha$, то $z=\frac{x-a}{\sigma}$ і якщо $x=\beta$, $z=\frac{\beta-a}{\sigma}$. Отримаємо

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$

Теорему доведено.

Приклад.

Похибка вимірювача дальності підкоряється нормальному закону розподілу з математичним сподіванням a=20 і середнім квадратичним відхиленням σ=60. Знайти імовірність того, що виміряна дальність відхилиться від істинної не більше ніж на 30м. .

X – виміряна дальність.

$$P(-30<X<30)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{30-20}{60}\right)-\Phi\left(\frac{-30-20}{60}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{1}{6}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{6}\right)=\Phi(0{,}17)+\Phi(0{,}83)=0{,}0675+0{,}2967=0{,}3642.$$

Теорема 2. Імовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини по абсолютній величині менше заданого додатнього числа ε обчислюється за формулою

$$P(|x-a|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma}).$$

Доведення.

$$P(|x-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<x<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Теорему доведено.

Заув. Імовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X менше ніж на 3σ відрізняється від свого математичного сподівання a, становить 0,9973, тобто майже дорівнює 1. Отже, нормально розподілена випадкова величина X з параметрами a і σ приймає значення в проміжку $(a-3\sigma, a+3\sigma)$. Ця властивість нормального розподілу відома під назвою *правила трьох сигм*.

Приклад.

На автоматичному токарному станку виготовляють болти, номінальна довжина яких 40 ммю В процесі роботи станка спостерігаються випадкові відхилення від вказаного розміру, які розподілені за нормальним законом розподілу з математичним сподіванням a=0 і середнім квадратичним відхиленням σ =1 мм. При контролі бракуються всі болти, розміри яких відрізняються від номінального більше, ніж на допуск 2 мм. Знайти імовірність того, що навмання взятий болт виявиться бракованим.

X – відхилення розміру навмання взятого болта від номінального.

Потрібно знайти $P(|X|>2)$. Випадкова подія $P(|X|>2)$ є протилежною до події $P(|X|\le 2)$, тому

$$P(|X|>2)=1-P(|X|\le 2).$$

Обчислюємо

$$P(|X|\le 2)=2\Phi\left(\frac{2}{1}\right)=2\cdot 0{,}4772=0{,}9544.$$

$$P(|X|>2)=1-0{,}9544=0{,}0456.$$

Зaув. Нормальний розподіл є найбільш важливим як в теорії так і на практиці. Розподіли багатьох реальних випадкових величин добре наближаються до нормальної кривої. Такими величинами, наприклад, є :

- похибки при вимірюваннях;
- величини перешкод на вході радіоприймача;
- параметри радіодеталей (індуктивність, ємкість, опір та ін.) при масовому виготовленні.

Значення нормального розподілу визначається також тим, що до нього зводяться інші закони розподілу випадкових величин.

6.Показниковий закон розподілу імовірностей.

Озн. *Показниковим (експоненціальним)* наз. розподіл імовірностей неперервної випадкової величини, який задається диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

де λ – постійна додатня величина.

Інтегральна функція розподілу імовірностей показникового розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}$$

Імовірність попадання в інтервал (a,b) обчислюється за формулою

$$P(a<X<b)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Числові характеристики показникового розподілу

$$M(X)\frac{1}{\lambda};D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Приклад.

Час T телефонної розмови – випадкова величина, що розподілена по показниковому розподілу:

$$F(t)=P(T<t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0.\end{cases}$$

Середня тривалість однієї розмови $\bar{t}=\frac{1}{\lambda}=2{,}5$, а λ=0,4. Знайти імовірність того, що розмова буде продовжуватися більше 3 хвилин.

Отримуємо:

$$P(T>3)=1-P(T<3)=1-\left(1-e^{-3\lambda}\right)=e^{-3\cdot 0{,}4}\approx 0{,}3.$$

Тема 10. Закон великих чисел. Граничні теореми.

1. Нерівність Чебишова.
2. Теорема Чебишова.
3. Теорема Бернуллі.
4. Теорема Ляпунова.

1.Нерівність Чебишова.

Теорія імовірностей вивчає закономірності, які притаманні масовим випадковим явищам. Вивчення цих закономірностей дозволяє науково обгрунтовано прогнозувати результати майбутніх випробувань.

Встановлено, що при достатньо загальних і широких умовах сумарна поведінка великого числа випадкових величин майже втрачає випадковий характер і стає закономірною. При цьому з'являється можливість робити кількісну оцінку деяких середніх характеристик. Особливості спостерігаються також в розподілах випадкових величин, які являють собою суму великої кількості взаємно незалежних випадкових величин, розподіленим по будь-яким законам. Ці закономірності відомі як *граничні теореми теорії імовірностей.*

Граничні теореми теорії імовірнотей діляться на дві групи:

- закон великих чисел: граничні властивості середніх арифметичних незалежних випадкових величин;
- центральна гранична теорема: граничні властивості закону розподілу суми незалежних випадкових величин.

При доведенні теорем закону великих чисел головну роль відіграє нерівність Чебишова, яка дає оцінку імовірності того, що випадкова величина X набере значення достатньо близьке до свого математичного сподівання.

Теорема 1. *(Нерівність Чебишова)*

Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання по абсолютній величині менше заданого додатнього числа ε є не меншою ніж різниця поміж одиницею та часткою дисперсії на ε^2:

$$P(|x-a|<\varepsilon)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Доведення. Події $|X-M(X)|<\varepsilon$ та $|X-M(X)|\ge\varepsilon$ – протилежні, отже,

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)+P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)=1.$$

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)=1-P(|X-M(X)|\ge\varepsilon). \quad (1)$$

Розглянемо імовірність $P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)$.

За означенням дисперсії маємо

$$D(X)=[x_1-M(X)]^2p_1+\ldots+[x_n-M(X)]^2p_n.$$

Відкинемо доданки, для яких $|x_i-M(X)|<\varepsilon$. Тоді сума зменшиться, тобто

$$D(X)\ge[x_{k+1}-M(X)]^2p_{k+1}+\ldots+[x_n-M(X)]^2p_n.$$

В кожному доданку замінимо різницю $[x-M(X)]^2$ на ε^2. Права частина нерівності від цього зменшиться

$$D(X)\ge\varepsilon^2p_{k+1}+\ldots+\varepsilon^2p_n=\varepsilon^2(p_{k+1}+\ldots+p_n),$$

де $p_{k+1}+\ldots+p_n$ – імовірність того, що випадкова величина набере значення поза межами проміжка, тобто – це імовірність $P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)$.

$$D(X)\ge\varepsilon^2P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)$$

$$\frac{D(X)}{\varepsilon^2}\ge P(|X-M(X)|\ge\varepsilon)$$

Підставимо в отриману нерівність (1), тоді

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорему доведено.

Приклад.

Пристрій складається з 10 незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента за проміжок часу T дорівнює 0,05. За допомогою нерівності Чебишова зробити оцінку імовірності того, що абсолютна величина різниці між числом відмовивших елементів і їх середнім числом за проміжок часу T виявиться меншим двох.

X – кількість відмовивших елементів.

$$M(X)=np=10\cdot 0{,}05=0{,}5;$$

$$D(X)=npq=10\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95=0{,}475.$$

За нерівністю Чебишова

$$P(|X-M(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

$$P(|x-0{,}5|<2)\geq 1-\frac{0{,}475}{4}=0{,}88.$$

2.Теорема Чебишева.

Розглянемо закон великих чисел в формі Чебишова.

Теорема 2. (*Чебишова*)

Якщо X_1, X_2, ..., X_n попарно незалежні випадкові величини з рівномірно обмеженими дисперсіями $D(X)\leq C$ (i=1, 2, ..., n), то для кожного наперед заданого додатнього ε, як завгодно близька до 1 імовірність того, що виконується нерівність

$$\left|\frac{X_1+...X_n}{n}-\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon,$$

якщо n достатньо велике.

Або

$$\lim_{n\to\infty}P(\left|\frac{X_1+...+X_n}{n}-\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}\right|<\varepsilon)=1.$$

Доведення. Розглянемо середнє арифметичне випадкових величин

$$\overline{X}=\frac{X_1+...+X_n}{n}.$$

Застосуємо для введеного середнього арифметичного нерівність Чебишова.

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{D(\overline{X})}{\varepsilon^2}.$$

За властивістю дисперсії маємо

$$D\left(\frac{X_1+...+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+...+D(X_n)}{n^2}\leq\frac{C+...+C}{n^2}=\frac{nC}{n^2}=\frac{C}{n}.$$

Тоді нерівність Чебишова перепишемо у вигляді

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Перейдемо до границі коли $n\to\infty$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}(P|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon)\geq 1.$$

Але імовірність не може бути більшою за 1. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}(P\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon)=1. \qquad (3)$$

Теорему доведено.

Приклад.

Дисперсія кожної із 4500 незалежних випадкових величин, що мають один і той самий закон розподілу імовірностей, дорівнює 5. Оцінити імовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань, взяте за абсолютною величиною, не перевищить 0,4.

Використаємо нерівність Чебишова для теореми Чебишова (2), отримаємо

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{4500}X_i}{4500}-\frac{\sum_{i=1}^{4500}M(X_i)}{4500}\right|<0{,}4\right)\geq 1-\frac{5}{4500\cdot 0{,}4}=0{,}003.$$

Заув. 1) Теорема Чебишова є загальною теоремою закону великих чисел.

2) Якщо перейти до протилежної події, то формулу (3) можна записати у вигляді:

$$\lim_{n\to\infty}(P\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|\geq\varepsilon)=0.$$

3) Суть теореми Чебишова в наступному: *хоча окремі незалежні випадкові величини можуть приймати значення далекі від своїх математичних сподівань, – середнє арифметичне достатньо великого числа випадкових величин з великою імовірністю приймає значення, близькі до визначенного постійного числа*

$$\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}.$$

Отже, неможливо сказати наперед яке значення набере окремо взята випадкова величина, але можна прогнозувати яке значення набере їх середнє арифметичне.

Середнє арифметичне достатньо великого числа незалежних випадкових величин втрачає характер випадковості.

3.Теорема Бернуллі.

Розглянемо закон великих чисел в формі Бернуллі. Теорема Бернуллі – перша із доведених граничних теорем по суті є наслідком з теореми Чебишова. Вона встановлює зв'язок між відносною частотою появи події і її імовірністю.

Теорема 3. (*Бернуллі*)

Якщо в кожному із n незалежних досліджень імовірність p появи події A постійна, то як завгодно близька до одиниці імовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p по абсолютній величині буде як завгодно мале, коли кількість досліджень достатньо велика. Або

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1$$

Доведення. Позначимо через X_1 – дискретну випадкову величину – кількість появи події A в першому дослідженні ; X_2 – в другому дослідженні; ..., X_n – в n-му дослідженні.

Кожна з величин $X_1, X_2, ..., X_n$ при появі події у відповідному випробуванні приймає значення, що дорівнює 1. Тоді сума $X_1 + X_2 + ...+ X_n$ дорівнює числу m появи події в n випробуваннях.

Значить $\frac{X_1+...+X_n}{n}=\frac{m}{n}$ – відносна частота появи події.

Математичне сподівання $M(X_i)$ кожної із величин X_i дорівнює імовірності p настання події A в одному випробуванні, тобто

$$M(X_i)=p \quad (i=1,..)$$

Тоді

$$\frac{M(X_1)+...+M(X_n)}{n}=\frac{p+...+p}{n}=\frac{np}{n}=p.$$

За теоремою Чебишова маємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

Теорему доведено.

Приклад.

Скільки потрібно перевірити виробів, щоб з імовірністю, не меншою за 0,95, можна б уло стверджувати, що абсолютна величина відхилення відносної частоти стардантних виробів від імовірності виробу бути стандартним, дорівнювала 0,9, не перевищить 0,01?

Використаємо нерівність Чебишова для теореми Чебишова (2)

$$P\left(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Маємо:

$$\overline{X}=\frac{m}{n},\quad M\left(\overline{X}\right)=p,\quad D(X)=pq<C.$$

Тоді:

$$P\left(\left|\frac{m}{n-p}\right|<\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=1-\frac{0{,}9\cdot 0{,}1}{n\cdot 0{,}01^2}\geq 0{,}05.$$

З нерівності отримуємо

$$n\geq 18000.$$

Тобто, найменша кількість деталей, які слід перевірит, становить 18000.

4.Теорема Ляпунова.

Розглянемо граничні теореми, що стосуються суми випадкових величин. Ця група теорем носить назву *центральної теореми*. Всі форми центральної граничної теореми присвячені виявленню умов, при яких виникає нормальний розподіл.

Теорема 4. (*Ляпунова*)

Нехай задано n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, кожна з яких має один і той самий закон розподілу імовірностей з математичним сподіванням $M(X)=0$ і середнім-квадратичним відхиленням $\sigma(X)=\sigma$ і при цьому існує за абсолютною величиною початковий момент третього порядку, тоді зі зростанням числа n закон розподілу суми заданих випадкових величин наближається до нормального.

Заув. 1. Суть теореми Ляпунова в тому, що закон розподілу достатньо великого числа незалежних випадкових величин, незважаючи на їх розподіл, як завгодно близький до нормального.

2. Вона пояснює, чому нормальний закон розподілу широко розповсюджений у природі і техніці. Він виникає завжди, коли досліджувана випадкова величина може бути представлена у вигляді суми достатньо великої кількості незалежних випадкових величин, кожна з яких порівняно мало впливає на їх суму.

3. Дослід показує, що вже при кількості доданків порядка десяти закон розподілу суми може бути нормальним.

Приклад.

1. Спостерігаємі розподіли імовірностей випадкових похибок вимірів дуже добре погоджуються з нормальним законом розподілу.
2. Шум, що виникає всередині радіотехнічного пристрою, розподілений нормально.

Тема 11. Багатовимірні випадкові величини.

1. Система двох випадкових величин.
2. Функції розподілу двовимірної випадкової величини.
3. Числові характеристики двовимірної випадкової величини.
4. Система довільного числа випадкових величин.

1.Система двох дискретних випадкових величин: функція розподілу, густина розподілу, числові характеристики.

Озн. *Системою двох випадкових величин* наз. сукупність двох випадкових величин X та Y, яка розглядається як єдине ціле.

Позначається: (X, Y).

Озн. *Законом розподілу* системи двох дискретних випадкових величин наз. відповідність між парами (δ_i, δ_j) та імовірностями p_{ij}.

Закон розподілу двовимірної випадкової величини можна задавати таблично

X / Y	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Геометрично систему двох дискретних випадкових величин можна розглядати як випадкову точку з координатами (X, Y).

Озн. Дві випадкові величини X і Y наз. *незалежними*, якщо імовірність будь-якого значення однієї з них не залежать від того, яке значення набуде друга.

Озн. Дві випадкові величини X і Y наз. *залежними*, якщо імовірність однієї з них змінюється в залежності від того, яке значення набула інша.

Озн. *Умовним законом розподілу* випадкової величини X, що залежить від Y, наз. закон розподілу X, який вона приймає при умові, що величина Y прийняла деяке конкретне значення y_k.

Позначаються умовні розподіли: $P(X = x_i / Y = y_k)$ та $P(Y = y_k / X = x_i)$.

<u>Зау.</u> 1. Для незалежних випадкових величин X і Y умовні закони розподілу дорівнюють безумовним

$$P(X = x_i / Y = y_k) = P(X = x_i),$$
$$P(Y = y_k / X = x_i) = P(Y = y_k).$$

2. Умовні імовірності обчислюються за формулами:

$$P(X = x_i / Y = y_k) = \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(Y = y_k)} = \frac{p_{ik}}{p_k},$$
$$P(Y = y_k / X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_k)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ik}}{p_i}.$$

Приклад.

Якість продукції характеризується двома випадковими параметрами: X, Y. Знайти безумовні закони розподілу складових випадкової величини $Z=(X, Y)$, закон розподілу якої задано таблицею

X / Y	0	0,1	0,2	0,3
2	0,2	0,05	0,1	0,05
3	0	0,1	0,15	0,15
4	0	0,15	0	0,05

А також умовний закон розподілу випадкової величини X, при умові, що Y набула значення 0,2.

Закон розподілу складової X має вигляд

X	2	3	4
P	0,4	0,4	0,2

Закон розподілу складової $У$ має вигляд

X	0	0,1	0,2	0,3
p	0,2	0,3	0,25	0,25

Знаходимо умовні імовірності можливих значень X:

$$P(X = 2 / Y = 0{,}2) = \frac{P(X = 2, Y = 0{,}2)}{P(Y = 0{,}2)} = \frac{0{,}1}{0{,}25} = 0{,}4;$$

$$P(X = 3 / Y = 0{,}2) = \frac{P(X = 3, Y = 0{,}2)}{P(Y = 0{,}2)} = \frac{0{,}15}{0{,}25} = 0{,}6;$$

$$P(X = 4 / Y = 0{,}2) = \frac{P(X = 4, Y = 0{,}2)}{P(Y = 0{,}2)} = \frac{0}{0{,}25} = 0.$$

Отримали умовний закон розподілу X

X	2	3	4
$P(X / Y = 0{,}2)$	0,4	0,6	0

2.Функції розподілу двовимірної випадкової величини.

Інтегральна функція розподілу.

Озн. *Функцією розподілу* двовимірної випадкової величини (X, Y) наз. функція $F(x, y)$ аргументів x та y, яка дорівнює імовірності того, що при випробуванні X набере значення, менше від x, і при цьому Y набере значення, менше від y

$$F(x, y) = P\{(X < x) \cdot (Y < y)\} = P(X < x, Y < y).$$

Геометрично функція розподілу є імовірність попадання випадкової величини (X, Y) в нескінченний квадрант з вершиною в точці (x, y), який знаходиться ліворуч і нижче цієї точки.

Властивості функції розподілу.

1. $0 \le F(x, y) \le 1$.

2. Неспадаюча по кожному аргументу.

$$F(x_2, y) \ge F(x_1, y), \text{ якщо } x_2 > x_1;$$
$$F(x, y_2) \ge F(x, y_1), \text{ якщо } y_2 > y_1.$$

3. Виконуються граничні співвідношення

$$\lim_{x \to -\infty} F(x, y) = \lim_{y \to -\infty} F(x, y) = \lim_{\substack{x \to -\infty \\ y \to -\infty}} F(x, y) = 0;$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} F(x, y) = 1.$$

4.Якщо один із аргументів прямує до $+\infty$, то перетворюється у функцію розподілу випадкової величини, яка відподівас іншому аргументу

$$F(x,+\infty)=F_1(x);\ F(+\infty,y)=F_2(y).$$

5.Неперервна зліва по кожному аргументу.

Наслідки із властивостей.

1. Імовірність попадання при випробуванні випадкової точки (X, Y) в нескінченну напівсмугу дорівнює приросту функції розподілу по одному із аргументів
$$P\{(x_1 < X < x_2)\cdot(Y < y)\}=F(x_2,y)-F(x_1,y),$$
$$P\{(X < x)\cdot(y_1 < Y < y_2)\}=F(x,y_2)-F(x,y_1).$$
2. Імовірність попадання при випробуванні випадкової точки (X, Y) в прямокутник, сторони кого паралельні координатним осям, обчислюється за формулою
$$P\{(x_1 < X < x_2)\cdot(y_1 < Y < y_2)\}=F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-(F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)).$$

Приклад.

Двовимірна випадкова величина задана функцією розподілу
$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x\le 0\cup y\le 0;\\ (1-e^{-x})(1-e^{-2y}), & x>0\cap y>0.\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що випадкова величина набере значення з квадрату, вершини якого мають координати (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Множина точок заданого квадрата визначається співвідношеннями
$$\{(0\le X<1)\cdot(0\le Y<1)\}.$$

Отже,
$$P\{(0\le X<1)\cdot(0\le Y<1)\}=F(1,1)-F(0,1)-(F(1,0)-F(0,0))\approx 0{,}547.$$

Диференціальна функція розподілу.

Озн. *Диференціальною функцією розподілу імовірностей* двовимірної неперервної випадкової величини (X, Y) наз. друга мішана часткова похідна від її інтегральної функції розподілу
$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Геометрично у тривімірному просторі функції $f(x,y)$ відповідає певна поверхня, яка наз. *поверхнею розподілу імовірностей системи двох неперервних випадкових величин (X, Y).*

Властивості диференціальної функції розподілу.

1. $f(x,y)\ge 0$.
2. $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy=1$.

Якщо $\Omega=\{-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty\}$, то
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1.$$

3.Імовірність розміщення двовимірної випадкової величини в області $D\subset\Omega$ обчислюється за формулою
$$P((x,y)\subset D)=\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Для прямокутної області $D=\{a<x<b,c<y<d\}$
$$P(a<x<b,c<y<d)=\int_a^b\int_c^d f(x,y)dxdy.$$

4.Функція розподілу імовірностей двовимірної випадкової величинивизначається за формулою
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy.$$

Для прямокутної області $\Omega=\{a<x<b,c<y<d\}$
$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(x,y)dxdy.$$

5.Диференціальні функції розподілів складових X та Y двовимірної випадкової величини (X,Y) за відомою щільнісю розподілу обчислюються за формулами
$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy,$$
$$f(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi,y)d\xi.$$

Теорема. Для того, щоб неперервні випадкові величини X та Y, що є складовими двовимірної випадкової величини (X, Y), були незалежними, необхідно і достатньо, щоб диференціальна функція розподілу (інтегральна) системи (X, Y) дорівнювала добутку диференціальних функцій розподілу (інтегральних) складових X та Y
$$f(x,y)=f_1(x)f_2(y),$$
$$F(x,y)=F_1(x)F_2(y).$$

<u>**Заув.**</u> Умовна щільність імовірності випадкової величини X визначається:
$$f_X(x/y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)},$$
а умовна щільність імовірності випадкової величини Y
$$f_Y(y/x)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}.$$

Приклад.

По каналу зв'язку передається один раз дискретний сигнал, імовірність вірного отримання якого 0,8. Визначити закон розподілу в табличній формі та інтегральну функцію розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y), де X – число вірно отриманих сигналів, Y – кількість невірно отриманих сигналів.

Закон розподілу випадкової величини (X, Y) в табличній формі має вигляд:

Y	X	
	$x_1=0$	$x_2=1$
$y_1=0$	0	0,8
$y_2=1$	0,2	0

Інтегральна функція розподілу має вигляд:

$$F(x,y)=\begin{cases}0{,}2, & 0<x\le 1, \quad y>1;\\ 0{,}8, & x>1, 0<y\le 1;\\ 1, & x>1, \quad y>1;\\ 0, & .\end{cases}$$

3.Числові характеристики двовимірної випадкової величини.

Нехай (X, Y) – двовимірна випадкова величина.

Математичне сподівання.

1.Для **дискретної** двовимірної випадкової величини:

$$M(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij}.$$

2.Для **неперервної** двовимірної випадкової величини:

$$M(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dxdy.$$

3.Для складових **дискретної** двовимірної випадкової величини:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij}; \qquad M(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j p_{ij}.$$

4.Для складових **неперервної** двовимірної випадкової величини:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf_1(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy;$$

$$M(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_1(y)dy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dxdy.$$

Дисперсія.

1.Для **дискретної** двовимірної випадкової величини:

$$D(XY)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M(X))^2(y_j-M(Y))^2 p_{ij}.$$

2.Для **неперервної** двовимірної випадкової величини:

$$D(XY)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2(y-M(Y))^2 f(x,y)dxdy.$$

3.Для складових **дискретної** випадкової величини:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-M(X))^2 p_{ij}; \quad D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_j-M(Y))^2 p_{ij}.$$

4.Для складових **неперервної** двовимірної випадкової величини:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-M(X))^2 f(x,y)dxdy;$$

$$D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y_j-M(Y))^2 f(x,y)dxdy.$$

Заув. Для обчислення дисперсії можна також застосовувати розрахункові формули.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}x_i^2P(X=x_i)-[M(X)]^2; \quad D(Y)=\sum_{j=1}^{n}y_j^2P(Y=y_j)-[M(Y)]^2.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f_1(x)dx-[M(X)]^2; \quad D(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}y^2f_2(y)dy-[M(Y)]^2.$$

Приклад.

Закон розподілу системи двох випадкових величичн задається таблицею

Y	X		
	1	2	3
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$

Визначити $M(X)$.

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij}=1\cdot\frac{1}{18}+2\cdot\frac{1}{9}+3\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{1}{18}+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{7}{3}.$$

4.Система довільного числа випадкових величин.

Геометрично система випадкових величин $X_1, X_2,...X_n$ – це випадкова точка або випадковий вектор в n-вимірному просторі.

Система випадкових величин $X_1, X_2,...X_n$ може задаватися інтегральною або диференціальною функціями розподілу імовірностей.

Озн. *Інтегральною функцією розподілу* системи n випадкових величин ($X_1, X_2,...X_n$) наз. функція детермінованих аргументів $x_1, x_2,..., x_n$, яка дорівнює імовірності сумісного виконання нерівностей $X_i < x_i$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$:

$$F(x_1,x_2,...,x_n)=P\{(X_1<x_1)(X_2<x_2)\cdot...\cdot(X_n<x_n)\}.$$

Заув. Ця функція має всі властивості функції розподілу імовірностей одного та двох аргументів. Крім того:

1. **Якщо принаймні один з аргументів прямує до -∞, то функція функція прямує до нуля.**
2. Якщо із системи $x_1, x_2,..., x_n$ виділити деяку підсистему $x_1, x_2,..., x_k$ $(k<n)$, то функцію розподілу для цієї підсистеми можна дістати, коли решта аргументів прямує до ∞
$$F(x_1,x_2,...,x_n)=F(x_1,x_2,...,x_k,\infty,...\infty).$$
3. Якщо всі аргументи спрямувати до ∞, то $F(\infty,\infty,...\infty)=1$.

Озн. *Диференціальною функцією розподілу* системи n випадкових величин ($X_1, X_2,...X_n$) наз. функція

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,x_2,...,x_n)}{\partial x_1\partial x_2...\partial x_n}.$$

Властивості

1. Невід'ємна.
2. Умова нормування $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1x_2\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n = 1.$
3. Щільність розподілу підсистеми $\bar{o}_1, \bar{o}_2, \ldots, \bar{o}_k$ $(k<n)$ визначається

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n-k} f(x_1x_2\ldots x_n)dx_{k+1}dx_{k+2}\ldots dn.$$

Числові характеристики.

1. *Математичне сподівання*

$$M(X_1X_2\ldots X_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_1x_2\ldots x_n f(x_1x_2\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

2. *Математичне сподівання сподівання складових*

$$M(X_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1x_2\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

3. *Дисперсія*

$$D(X_1X_2\ldots X_n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} (x_1 - M(X_1))^2\ldots(x_n - M(X_n))^2 f(x_1x_2\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

4. *Дисперсія складових:*

$$D(X_i) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty} x_i^2 f(x_1x_2\ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n - M^2(X_i).$$

Тема 12. Елементи математичної статистики. Вибірковий метод.

1. Задачі математичної статистики.
2. Повторна і безповторна вибірки.
3. Способи побудови вибірки.

1.Задачі математичної статистики.

Математична статистика займається отриманням висновків про масові явища і процеси за допомогою спостережень або випробувань. Ці висновки стосуються не окремих досліджень, а являють собою твердження про загальні характеристики деякого явища.

Математична статистика обпирається на теорію імовірностей і ставить перед собою дві основні задачі:

Задача перша: вказати метод відбору та групування статистичних даних, отриманих в результаті спостережень або досліджень.

Задача друга: розробка методів аналізу статистичних даних в залежності від мети дослідження. До неї відносять:

- ***визначення закону розподілу випадкової величини X.*** Тобто, коли по значенням $x_1, x_2, \ldots, x_n$, отриманим в результаті незалежних вимірів випадкової величини X, потрібно оцінити невідому інтегральну $F(x)$ функцію розподілу величини X або диференціальну $f(x)$ функцію розподілу, якщо X – неперервна випадкова величин.;
- ***визначення невідомих параметрів відомої функції розподілу випадкової величини.*** Тобто, коли на основі фізичних або загальнотеоретичних міркувань робиться висновок, що випадкова величина X має функцію розподілу визначеного виду, яка залежить від кількох параметрів, значення яких невідомі. По результатам спостережень потрібно оцінити значення цих параметрів.
- ***статистична перевірка гіпотези про закон розподілу випадкової величини.*** Тобто, коли необхідно з'ясувати чи співпадають отримані дані з гіпотезою про те, що випадкова величина має вибраний закон розподілу.

Приклад.

Нехай на вхід радіоприймача потрапляє випадкове коливання $X(t)$, яке в кожен момент часу являє собою суму сигналу $s(t)$ та перешкоди $n(t)$ – гіпотеза H_1, або однієї перешкоди – гіпотеза H_0. В деякий фіксований момент часу виміряли величину X. По отриманому числовому значенні x можна з'ясувати, чи був присутнім на вході сигнал $s(t)$, тобто вибрати одну з двох гіпотез:

$$H_1(x=s+n) \text{ або } H_0(x=n).$$

Сучасна математична статистика займається розробкою методів визначення необхідної кількості випробувань до початку дослідження та під час дослідження. Сучасну математичну статистику визначають як науку про прийняття рішення в умовах невизначеності.

Отже, задача математичної статистики полягає в створенні методів відбору та обробки статистичних даних для отримання наукових та практичних висновків.

2. Повторна і безповторна вибірки.

Вихідними даними, що підлягають обробці, служать результати спостережень над випадковою величиною.

Нехай потрібно дослідити сукупність однорідних об'єктів відносно деякої якосної або кількісної ознаки.

Приклад.

Є партія деталей. Якісною ознакою може бути стандартність деталі, а кількісною – розмір деталі.

Озн. *Генеральною сукупністю* наз. сукупність об'єктів, яка досліджується на ту чи іншу якісну або кількісну ознаку.

Якщо генеральна сукупність містить велику кількість об'єктів, то виконати повне дослідження фізично неможливо. В таких випадках із генеральної сукупності відбирають обмежену кількість об'єктів для дослідження.

Озн. *Вибірковою сукупністю* (*вибіркою*) наз. сукупність випадково відібраних об'єктів із генеральної сукупності для їх безпосереднього дослідження.

Озн. *Об'ємом сукупності* (вибірквої або генеральної) наз. число об'єктів цієї сукупності.

Вибір можна виконувати двома шляхами: після того як об'єкт відібраний і над ним виконали спостереження, його можна повернути або не повернути в генеральну сукупність. Тому вибірки ділять на повторні і безповторні.

Озн. *Повторною вибіркою* наз. вибірка, при якій відібраний об'єкт повертається в генеральну сукупність перед вибором наступного об'єкта.

Озн. *Безповторної вибіркою* наз. вибірка, при якій відібраний об'єкт в генеральну сукупність більше не повертається.

<u>**Заув.**</u> 1) На практиці зазвичай використовують безповторну вибірку.

2) Для того, щоб по даним вибірки можна було робити достатньо вірні висновки про ознаку генеральної сукупності, необхідно щоб об'єкти вибірки її вірно представляли. Тобто *вибірка повинна бути репрезентативною (представничою)*. В силу закону великих чисел, вибірка буде репрезентативною, якщо її здійснювати випадково. Кожен об'єкт вибірки може бути відібраний випадково із генеральної сукупності, якщо усі об'єкти мають однакову імовірність попасти у вибірку.

3) Якщо об'єм генеральної сукупності достатньо великий, а вибірка складає лише незначну частину генеральної сукупності, то різниця між повторною і безповторною вибірками – незначна.

3.Способи побудови вибірки.

На прктиці використовують різні способи відбору. Усі ці способи можна поділити на дві групи:

1. Вибір при якому генеральну сукупність не треба ділити на частини.
2. Вибір при якому генеральну сукупність потрібно ділити на частини.

У зв'язку з цим розглядають, так звані, просту і складну вибірки.

Озн. *Простою вибіркою* наз. вибірка, при якій об'єкти для дослідження вибираються по одному безпосередньо із генеральної сукупності.

Проста вибірка може бути повторною і безповторною.

Озн. *Складною вибіркою* наз. вибірка, при якій генеральна сукупність спочатку ділиться на частини, а потім вже вибираються об'єкти для дослідження.

Складні вибірки діляться на:

- механічні;
- типові;
- серійні.

Озн. *Механічною вибіркою* наз. вибірка, при якій генеральна сукупність спочатку ділиться на стільки груп, скільки об'єктів повинно увійти до вибірки, після чого із кожної групи вибирається по одному об'єкту для дослідження.

Приклад.

Якщо потрібно відібрати 20% виготовлених станком деталей, вибирають кожну п'яту.

<u>**Заув.**</u> Деколи механічна вибірка не забеспечує репрезентативність вибірки.

Приклад.

Якщо вибирають кожен двадцятий виточений вал, і відразу після вибору роблять заміну різця, то відібраними виявляться всі вали, що обточені тупими різцями. В такому випадку потрібно уникнути співпадіння ритму відбору з ритмом заміни різця, для чого потрібно, наприклад, вибирати кожен десятий вал із двадцяти обточених.

Озн. *Типовою вибіркою* наз. вибірка, при якій генеральна сукупність ділиться на типові частини, після чого з кожної типової частини вибираються об'єкти для дослідження.

Приклад.

Якщо вироби виготовляються кількома станками, доцільно робити вибір із продукції кожного станка окремо.

<u>**Заув.**</u> Типовий відбір використовують, якщо досліджувана ознака суттєво коливається в різних типових частинах генеральної сукупності.

Приклад.

Якщо продукція виготовляється на кількох станках, серед яких є більш і менш зношені, типовий відбір є доцільним.

Озн. *Серійною вибіркою* наз. вибірка, при якій об'єкти із генеральної сукупності вибираються не по одному, а серіями, які потім повністю досліджуються.

Приклад.

Якщо вироби виготовлені великою кількості станків-автоматів, то повністю досліджують продукцію кількох станків.

<u>**Заув.**</u> Серійним вибором користуються тоді, коли досліджувана ознака в різних серіях незначно коливається.

<u>**Заув.**</u> На практиці часто застосовують комбінований відбір, при якому сполучаються різні способи вибору.

Приклад.

Розбивають генеральну сукупність на серії однакового об'єму. Потім вибирають кілька серій, після чого із кожної серії вибирають окремі об'єкти.

Тема 13. Статистичний закон розподілу вибірки.

1. Статистичний закон розподілу.
2. Табличне задання вибірки.
3. Графічне задання вибірки.
4. Аналітичне задання вибірки.

1.Статистичний закон розподілу вибірки.

Нехай із генеральної сукупності взято вибірку. При цьому x_1 спостерігали n_1 раз, $x_2 - n_2$ раз, ..., $x_k - n_k$ раз.

Озн. *Варіантом* наз. спостерігаєме значення ознаки x_i.

Озн. *Варіаційним рядом* наз. послідовність варіант, записана в порядку зростання або спадання.

Варіаційний ряд може бути дискретним або неперервним.

Озн. *Частотою* наз. кількість раз, яку спостерігають ознаку x_i.

Позначається: n_i.

Озн. *Відносною частотою* наз. відношення частоти до об'єма вибірки.

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

Заув. Об'єм вибірки дорівнює сумі частот:

$$n = \sum_{1}^{k} n_i .$$

Озн. *Статистичним законом розподілу вибірки* наз. відповідність між значеннями досліджуваної ознаки та частотами або відносними частотами, з якими ця ознака з'являється.

Статистичний закон розподілу вибірки можна задавати
- таблично,
- графічно,
- аналітично.

2.Табличне задання статистичного закону розподілу вибірки.

Табличне задання статистичного закону розподілу вибірки відбувається за допомогою таблиці, перший ряд якої містить перелік ознак, що приймає досліджувана ознака. Другий – відповідні ознакам частоти або відносні частоти.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

x_i	x_1	x_2	...	x_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

Заув. Якщо досліджувана ознака є неперервною величиною, то статистичний закон розподілу вибірки записується у формі розподілу частинних інтервалів.

$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_k - x_{k+1}$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Приклад.

Похибки 15 вимірів дальності до цілі за допомогою радіодальнометра задані таблицею

Номер виміру	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
похибка	18	-15	-5	6	-15	6	12	-5	-10	6	-5	-10	12	-10	-5

Складаємо закон розподілу вибірки

x_i	-15	-10	-5	6	12	18
n_i	2	3	4	3	2	1
w_i	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

3.Графічне задання статистичного закону розподілу вибірки.

З метою наочності статистичний закон розподілу задають графічно за допомогою полігона та гістограми.

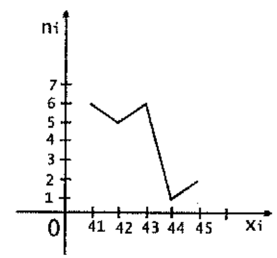
Озн. *Полігоном частот* наз. ламана, відрізки якої об'єднують точки з координатами

$$(x_1, n_1), (x_2, n_2), \quad \ldots, (x_k, n_k).$$

Приклад.

Побудувати полігон частот вибірки.

x_i	41	42	43	44	45
n_i	6	5	6	1	2



Озн. *Полігоном відносних частот* наз. ламану, відрізки якої об'єднують точки з координатами

$(x_1, w_1), (x_2, w_2), \ \ldots, (x_k, w_k)$.

Приклад.

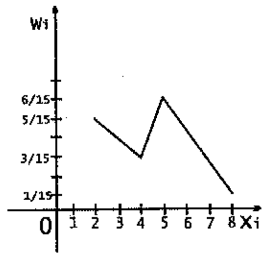
Побудувати полігон відносних частот вибірки.

x_i	2	4	5	8
n_i	10	6	12	2

Складаємо закон розподілу відносних частот

x_i	2	4	5	8
w_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$

Полігон відносних частот має вигляд:



Озн. *Гістограмою частот* наз. фігура, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною $h=x_{i+1}-x_i$, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$.

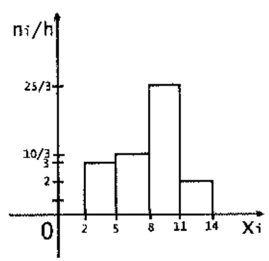
Відношення $\frac{n_i}{h}$ наз. *щільністю частоти.*

Приклад.

Побудувати гістограму частот вибірки.

$x_i - x_{i+1}$	2-5	5-8	8-11	11-14
n_i	9	10	25	6

Для заданої вибірки довжина частинних інтервалів h=3. Отримуємо гістограму



Озн. *Гістограмою відносних частот* наз. фігура, яка складається із прямокутників, основами яких є частинні інтервали довжиною $h=x_{i+1}-x_i$, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{w_i}{h}$.

Відношення $\frac{w_i}{h}$ наз. *щільністю відносної частоти.*

Заув. 1. Виразність гістограми суттєво залежить від обрання довжини h частинних інтервалів.

2. Гістограмою доцільно користуватися, коли вибір здійснюється з неперервного розподілу і кількість вибіркових значень велика.

3. Площа гістограми частот дорівнює сумі всіх частот, тобто об'єму вибірки. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто 1

4.Аналітичне задання статистичного закону розподілу вибірки.

Нехай відомий статистичний розподіл частот кількісної ознаки X.

Позначимо: n_x – число спостережень, при яких спостерігалося значення ознаки x.

n – загальне число спостережень.

Відносна частота події $X< x$ дорівнює $\frac{n_x}{n}$. Якщо x змінюється, то змінюється відносна частота. Отже, відносна частота є функцією від x. Ця функція знаходиться за допомогою випробування або емпіричним (розрахунковим) шляхом, тому наз. *емпіричною функцією.*

Озн. *Емпіричною функцією розподілу* наз. функція $F^*(x)$, яка для кожного значення x визначає відносну частоту події $X< x$.

$$F^*=\frac{n_x}{n},$$

де: n_x – сума частот варіант, що менші за x,

n – об'єм вибірки.

Властивості емпіричної функції розподілу.

1) Значення функції належать відрізку [0;1].
2) Функція – неспадаюча.
3) Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x)=0$, якщо $x \le x_1$.
Якщо x_2 – найбільша варіанта, то $F^*(x)=1$, якщо $x > x_2$.

Приклад.

Із 100 транзисторів в середньому буває два бракованих. Перевірили десять партій по 100 транзисторів в кожній. Відхилення кількості бракованих транзисторів від середнього задані таблицею

Номер партії	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Відхилення	-1	0	1	1	-1	1	0	-2	2	1

Скласти закон розподілу вибірки та побудувати її емпіричну функцію розподілу.

Закон розподілу заданої вибірки має вигляд:

x_i	-2	-1	0	1	2
n_i	1	2	2	4	1
w_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Найменша варіанта дорівнює -2, отже,

$F^*(x)=0$, якщо $x \le -2$.

Значення $X<-1$, а саме $x_1=-2$ спостерігалось 1 раз, отже,

$F^*(x) = 0,1$, якщо $-2< x\le -1$.

Значення $X<0$, а саме $x_1=-2$, $x_2=-1$ спостерігалось 1+2=3 рази, отже,

$F^*(x)=0,3$, якщо $-1< x\le 0$.

Значення $X<1$, а саме $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$ спостерігалось 1+2+2=5 раз, отже,

$F^*(x)=0,5$, якщо $0< x\le 1$.

Значення $X<2$, а саме $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=0$, $x_4=1$ спостерігалось 1+2+2+4=9 раз, отже,

$F^*(x)=0,9$, якщо $1< x\le 2$.

$x=2$ – найбільша варіанта, отже,

$F^*(x)=1$, якщо $x >2$.

Шукана емпірічна функція розподілу має вигляд

$$F^*(x)=\begin{cases}0\ , & x\le -2;\\ 0,1\ , & -2<x\le -1;\\ 0,3\ , & -1<x\le 0;\\ 0,5\ , & -1<x\le 1;\\ 0,9\ , & 1<x\le 2;\\ 1\ , & x>2.\end{cases}$$

Тема 14. Числові характеристики вибірки.

1. Вибіркова середня.
2. Структурні середні.
3. Вибіркова дисперсія.
4. Розмах та коефіцієнт варіації.
5. Початкові та центральні моменти.

1.Вибіркова середня.

Побудова статистичних законів розподілів вибірки та їх графічне зображення – це перший крок на шляху розв'язування задач математичної статистики. Наступний крок передбачає знаходження числових характеристик, які виражають найбільш суттєві особливості статистичного розподілу вибірки.

Озн. *Вибірковою середньою* наз. середнє арифметичне значень ознаки вибіркової сукупності.

$$\overline{x_B}=\frac{n_1x_1+n_2x_2+...+n_kx_k}{n},\quad \text{або}\quad \overline{x_B}=\frac{\sum_1^k n_ix_i}{n}.$$

Приклад.

Знайти середню вибіркову, за відомим статистичним законом розподілу вибірки.

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Обчислюємо вибіркову середню за означенням

$$\overline{x_B}=\frac{2\cdot 12+6\cdot 18+10\cdot 30}{12+18+30}=7,2.$$

Заув. Якщо вибірка задається інтервальним статистичним розподілом, тоді при знаходженні середньої вибіркової потрібно перейти до дискретного розподілу, варіантами якого є середини інтервалів.

Властивості вибіркової середньої.

1) Сума відхилень результатів спостережень від середньої арифметичної дорівнює нулю.
2) Якщо всі значення спостережень зменшити (збільшити) на одне і те саме число, то середня вибіркова зменшиться (збільшиться) на те саме число.
3) Якщо всі значення спостережень зменшити (збільшити) в одне і те саме число раз, то середня вибіркова зменшиться (збільшиться) в те саме число раз.

Заув. Якщо обчислення середньої вибіркової веде до складних розрахунків, то використовують 2)-3) властивості і знаходять середню вибіркову зменшених варіант.

2.Структурні середні.

Крім вибіркової середньої в статистиці застосовують *структурні середні*, які не залежать від значень варіант, що розташовані по краях розподілу, а пов'язані із рядом частот. До структурних середніх належать:

- медіана,
- мода.

Озн. *Модою* дискретного статистичного розподілу наз. варіанта, яка має найбільшу частоту.

Позначається: m.

Заув. Для інтервального статистичного розподілу спочатку визначається *модальний інтервал* $[x_m, x_{m+1})$, тобто інтервал, для якого

$$\frac{n_m}{h_m} = \max\left\{\frac{n_i}{h_i}\right\},$$

де: h_i – довжина частинного інтервалу $[x_i, x_{i+1})$,

n_i – число варіант цього інтервалу.

Значення моди міститься всередині модального інтервалу і обчислюється за формулою:

$$m = x_m + \frac{n_m - n_{m-1}}{2n_m - n_{m-1} + n_{m+1}} h_m .$$

Озн. *Медіаною* дискретного статистичного розподілу наз. число, яке ділить варіаційний ряд на дві рівні за кількістю варіан частини.

Позначається: M.

Якщо число варіан – непарне, тобто $n = 2m + 1$, то

$$M = x_{m+1}.$$

Якщо обсяг вибірки – парне число, тобто $n = 2m$, то медіана дорівнює середньому арифметичному "середньої" пари варіант:

$$M = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}.$$

Озн. *Медіаною* для інтервального статистичного розподілу наз. число M, для якого виконується рівність

$$F^*(M) = 0{,}5,$$

де F^* – емпірічна функція цього розподілу.

Формула для обчислення медіани має вигляд

$$M = x_m + \frac{0{,}5 - F^*(x_m)}{F^*(x_{m+1}) - F^*(x_m)}(x_{m+1} - x_m),$$

де $[x_m, x_{m+1})$ – медіанний частинний інтервал, для якого виконуються нерівності

$$F^*(x_m) < 0{,}5 \text{ та } F^*(x_{m+1}) > 0{,}5 .$$

3. Вибіркова дисперсія.

Розглянемо тепер деякі числові характеристики розсіювання варіант навколо середньої вибіркової.

Озн. *Вибірковою дисперсією* наз. середнє арифметичне квадратів відхилень спостерігаємих значень ознаки від їх середнього значення.

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n}.$$

Приклад.

Обчислити дисперсію вибірки.

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Середнє вибіркове нам відоме, воно дорівнює 7,2. Обчислюємо дисперсію за означенням

$$D_B = \frac{12(2-7{,}2)^2 + 18(6-7{,}2)^2 + 30(10-7{,}2)^2}{60} = 9{,}76 .$$

Теорема. (*Розрахункова формула дисперсії*)

Дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки без квадрата загальної середньої:

$$D_B = \overline{x_B^2} - [\overline{x_B}]^2 .$$

Доведення.

$$D_B = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n} = \frac{\sum n_i (x_i^{\,2} - 2x_i \overline{x_B} + (\overline{x_B})^2)}{n} = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - 2\overline{x_B}\frac{\sum n_i x_i}{n} + [\overline{x_B}]^2 = \overline{x_B^2} - 2\overline{x_B}\,\overline{x_B} + [\overline{x_B}]^2 =$$

$$= \overline{x_B^2} - [\overline{x_B}]^2 .$$

Теорему доведено.

Приклад.

Обчислити вибіркову дисперсію за розрахунковою формулою.

x_i	2	6	10
n_i	12	18	30

Середня вибіркова відома – 7,2. Знаходимо спочатку середню вибіркову для квадратів значень ознаки.

$$\overline{x_B^2} = \frac{2^2 \cdot 12 + 6^2 \cdot 18 + 10^2 \cdot 30}{60} = 61{,}6$$

Тоді дисперсія

$$D_B = 61{,}6 - 7{,}2^2 = 9{,}76.$$

Озн. *Вибірковим середнім-квадратичним відхиленням* наз. корінь квадратний із вибіркової дисперсії: $\sigma_B = \sqrt{D_B}$

4. Розмах та коефіцієнт варіації.

Коливність окремих значень варіант характеризують показники коливності. Найпростішим із них є показник *розмаху варіації*.

Озн. *Розмахом варіації* наз. різниця між найбільшою та найменшою варіантами.

$$R = x_{\max} - x_{\min} .$$

Заув. 1. Розмах варіації використовується при статистичному вивченні якості продукції.

2. Якщо середня вибіркова відмінна від нуля, то для порівняння двох статистичних розподілів з точки зору їх розмірності відносно середньої вибіркової вводиться показник *коефіцієнт варіації*, який дорівнює відношенню середнього квадратичного відхилення до середньої вибіркової і виражений у відсотках:

$$V = \frac{\sigma_B}{\overline{x_B}} \cdot 100\% .$$

5. Початкові та центральні моменти.

Узагальнюючими характеристиками статистичних розподілів є статистичні моменти розподілу.

Озн. *Початковим емпіричним моментом m-го порядку* розподілу наз. середнє значення варіант у степені *m*:

$$\nu_m = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i)^m n_i}{n}.$$

Заув. 1. На практиці використовують початкові емпіричні моменти перших чотирьох порядків.

2. Із врахуванням означення початкового моменту можна записати формулу для обчислення дисперсії:

$$D_B = \nu_2 - (\nu_1)^2 .$$

Озн. *Центральним емпіричним моментом m-го порядку* розподілу наз. середня величина відхилення варіант від середньої вибіркової у степені *m*:

$$\mu_m = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \overline{x_B}\right)^m n_i}{n}.$$

Заув. На практиці використовують центральні емпіричні моменти третього та четвертого порядків.

Озн. *Коефіцієнтом асиметрії* статистичного розподілу вибірки наз. величина

$$As = \frac{\mu_3}{\sigma_B^3}.$$

Заув. 1.Для строго симетричного розподілу варіан статистичного розподілу $As = 0$.

2 . Вважають, якщо $|As| < 0{,}25$, то асиметрія низька, якщо $|As| \geq 0{,}25$ – середня, якщо $|As| > 0{,}5$ – висока.

5. Якщо $As < 0$, то у статистичному розподілі переважають варіанти, значення яких менші від $\overline{x_B}$. Така симетрія наз. *від'ємною* або *лівосторонньою*. Коли $As > 0$, то у варіаційному ряді переважають варіанти, значення яких більші від $\overline{x_B}$. Така симетрія наз. *додатньою* або *правосторонньою*.

Озн. *Ексцесом* статистичного розподілу вибірки наз. величина

$$Es = \frac{\mu_4}{\sigma_B^4} - 3.$$

Заув. 1. Ексцес дає оцінку крутості досліджуваного статистичного розподілу в порівнянні з нормальним.

2. Для нормального розподілу $Es = 0$. Якщо $Es > 0$, розподіл вважається *гостровершинним*, якщо $Es < 0$, то – *плосковершинним* .

Тема 15. Статистичні оцінки параметрів розподілу.

1. Точкові та інтервальні оцінки.
2. Вимоги до статистичних оцінок.
3. Точність оцінки, довірчий інтервал.
4. Довірчий інтервал для оцінки матемематичного сподівання нормального розподілу.
5. Довірчий інтервал для оцінки середнього-квадратичного відхилення нормального розподілу.
6. Мінімальний обсяг вибірки.

1.Точкові та інтервальні оцінки.

Однією з центральних задач математичної статистики є задача оцінки теоретичного розподілу випадкової величини на основі вибіркових даних. При цьому часто припускається, що закон розподілу генеральної сукупності відомий, але невідомі параметри цього закону (наприклад, математичне сподівання, дисперсія). Потрібно знайти наближене значення цих параметрів, тобто отримати їх статистичні оцінки.

Озн. *Статистичною оцінкою невідомого параметра теоретичного розподілу* наз. функція від вибіркових значень (варіант), яка в певному статистичному сенсі є близькою до справжнього значення цього параметра.

Отже, знайти статистичну оцінку невідомого параметра теоретичного розподілу, означає знайти функцію від вибіркових значень, яка дає наближене значення невідомого параметра.

Усі оцінки діляться на точкові та інтервальні.

Озн. *Точковою* наз. оцінка, яка визначається одним числом.

Озн. *Інтервальною* наз. оцінка, яка визначається двома числами – початком та кінцем інтервалу.

Заув. 1.Якщо вибірка має малий об'єм, то точкова оцінка значно відрізняється від оцінюваємого параметра, тобто веде до значних похибок.

2. Точкові оцінки застосовуються перш за все тоді, коли за їх допомогою можна провести ще і інші розрахунки.

3. Точкові оцінки не несуть інформації про точність конкретної оцінки. Точність і надійність оцінки дозволяють визначити інтервальні оцінки.

Існують три **методи визначення точкових статистичних оцінок**:

1. Метод аналогій.
2. Метод найменших квадратів.
3. Метод максимальної правдоподібності.

Метод аналогій базується на тому, що для параметрів генеральної сукупності вибирають такі самі параметри вибірки. Наприклад, для оцінки $M_\Gamma(X)$, $D_\Gamma(X)$ вибирають аналогічні статистики – $\overline{x_B}$, $\overline{y_B}$.

Згідно з **методом найменших квадратів** статистичні оцінки визначаються з умови мінімізації суми квадратів відхилень варіант вибірки від статистичної оцінки.

Суть **методу максимальної правдоподібності** полягає в тому, що фіксуючи значення варіант $x_1, x_2, ..., x_n$, визначають таке значення параметра θ^*, при якому функція

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_n, \theta^*\right) = f\left(x_1, \theta^*\right) f\left(x_2, \theta^*\right) ... f\left(x_n, \theta^*\right)$$

максимізується. Вона наз функцією *максимізації правдоподібності.* (Функція $f(x,\theta)$ є щільністю імовірностей).

2.Вимоги до статистичних оцінок.

Позначимо θ^* оцінку деякого теоретичного параметра θ. Якщо розглянути вибіркові значення $x_1, x_2, ..., x_n$ як реалізації випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, що отримали конкретні значення в результаті дипробовувань, то можна оцінку θ^* представити функцією від випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$\theta^* = \varphi(X_1, X_2, ..., X_n).$$

Для того, щоб статистична оцінка давала добре наближеня невідомого параметра, вона повинна задовільнати вимоги:

- незміщенність;
- ефективність;
- змістовність.

Озн. *Незміщеною статистичною оцінкою* θ^* невідомого параметра θ наз. статистична оцінка, математичне сподівання якої дорівнює оцінюваемому параметру.

$$M(\theta^*)=\theta.$$

Озн. *Ефективною статистичною оцінкою невідомого параметра* наз. статистична оцінка, яка при заданому об'ємі вибірки має найменшу можливу дисперсію.

Озн. *Змістовною (спроможною)* наз. статистична оцінка, яка при $n\to\infty$ прямує по імовірності до оцінюваемого параметра.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta^* - \theta| < \varepsilon) = 1.$$

Заув.
1. Оцінка генеральної середньої вибірковою середньою є незміщеною і змістовною, якщо вибірка повторна, і незміщеною для безповторної вибірки.
2. В якості оцінки генеральної дисперсії приймають виправлену вибіркову дисперсію:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B.$$

Ця оцінка задовільнає вимогу незміщенності.

3. Для оцінки середнього-квадратичного відхилення генеральної сукупності використовують *виправлене вибіркове середнє-квадратичне відхилення*, яке дорівнює кореню квадратному із виправленої дисперсії.

3.Точність оцінки та довірчий інтервал.

Нехай, отримана за даними вибірки, статистична характеристика θ^* є оцінкою невідомого параметра θ. Нехай θ – постійне число (воно може бути і випадковою величиною). θ^* тим краще визначає параметр θ, чим менше абсолютна величина відхилення $|\theta-\theta^*|$. Тобто, якщо $\delta > 0$ і

$$|\theta-\theta^*|<\delta,$$

то чим менше δ, тим оцінка точніша. Таким чином, додатне число δ характеризує *точність оцінки.*

Озн. *Надійністю (довірчою імовірністю) оцінки* θ *по* θ^* наз. імовірність γ, з якою виконується нерівність

$$|\theta-\theta^*|<\delta.$$

Звичайно, надійність оцінки задається наперед. В якості надійності беруть число, близьке до одиниці.

Нехай відома надійність γ, така що

$$P(|\theta-\theta^*|<\delta)=\gamma.$$

Тоді

$$P(-\delta<\theta-\theta^*<\delta)=\gamma.$$

$$P(\theta^*-\delta<\theta<\theta^*+\delta)=\gamma.$$

Тобто, імовірність того, що інтервал $(\theta^*-\delta;\ \theta^*+\delta)$ містить у собі невідомий параметр θ, дорівнює γ.

Озн. *Довірчим інтервалом* наз. інтервал $(\theta^*-\delta;\ \theta^*+\delta)$, який покриває невідомий параметр із заданою надійністю γ.

Озн. *Граничною помилкою* наз. найбільше відхилення середньої вибіркової від середньої генеральної, яке можливе для заданої довірчої імовірності.

Позначається: .

Обчислюється за формулою:

$$\Delta = t\overline{\sigma},$$

де t – корінь рівняння $2\Phi(t)=\gamma$.

Озн. *Генеральною часткою* наз. відношення числа об'єктів генеральної сукупност, що володіють ознакою α, до обсягу генеральної сукупності:

$$p = \frac{M}{N}.$$

Озн. *Вибірковою часткою* наз. відношення числа об'єктів вибіркової сукупност, що володіють ознакою α, до обсягу вибіркової сукупності:

$$w = \frac{m}{n}.$$

На практиці застосовують формули граничної помилки:

середньої вибіркової повторної вибірки

$$\Delta = t\sqrt{\frac{D_B}{n}},$$

середньої вибіркової безповторної вибірки

$$\Delta = t\sqrt{\frac{D_B}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)},$$

частки вибіркової повторної вибірки

$$\Delta = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}},$$

частки вибіркової безповторної вибірки

$$\Delta = t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}.$$

де: N – обсяг генеральної сукупності.

В результаті $(\overline{x_B}-\Delta; \overline{x_B}+\Delta)$ є довірчим інтервалом, який з надійністю γ покриває невідому середню генеральну. $(w-\Delta; w+\Delta)$ – довірчий інтервал, який з надійністю γ покриває невідому генеральну частку.

Приклад.

Із партії 9000 однотипних радіодеталей перевірено 400 деталей. Серед них виявилось 360 першосортних деталей. Знайти межі, в яких з імовірністю 0,9542 міститься частка деталей першого сорту всієї партії, якщо вибірка:

а) повторна, б) безповторна.

Знаходимо корень рівняння

$$2\Phi(t)=0{,}9542$$
$$t=2.$$

Вибіркова частка дорівнює

$$w=\frac{360}{400}=0{,}9.$$

Граничну помилку повторної вибірки знаходимо за формулою:

$$\Delta=t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}}=2\cdot\sqrt{\frac{0{,}9(1-0{,}9)}{400}}=0{,}03.$$

Отже, для повторної вибірки довірчим є інтервал

$$(0{,}9-0{,}03;0{,}9+0{,}03)=(0{,}87;0{,}93).$$

Для безповторної вибірки граничну помилку знаходимо за формулою:

$$\Delta=t\sqrt{\frac{w(1-w)}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}=2\cdot\sqrt{\frac{0{,}9(1-0{,}9)}{400}\left(1-\frac{400}{9000}\right)}=0{,}029.$$

Отримуємо для безповторної вибірки довірчий інтервал

$$(0{,}871;0{,}929).$$

4. Довірчий інтервал для оцінки математичного сподівання нормального розподілу.

Нехай кількісна ознака X генеральної сукупності розподілена нормально і середнє-квадратичне відхилення σ цього розподілу відоме. Треба оцінити невідоме математичне сподівання a по вибірковій середній $\bar{x}$.

Знайдемо довірчий інтервал, який покриває невідомий параметр a з надійністю γ.

Розглянемо вибіркову середню, як випадкову величину і вибіркові значення ознаки, як однаково розподілені незалежні випадкові величини. Тоді математичне сподівання кожної із цих величин дорівнює a, а середнє-квадратичне відхилення σ.

<u>Заув.</u> Приймаємо без доведення той факт, що якщо випадкова величина X розподілена нормально, то вибіркова середня $\overline{X}$ також розподілена нормально. Параметри для розподілу $\overline{X}$ такі, що

$$M(\overline{X})=a,\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Згідно означення необхідно виконання співвідношення

$$P(|\overline{X}-a|<\delta)=\gamma,$$

де γ – задана надійність.

Для нормально розподіленої випадкової величини маємо

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Зробимо заміну X на $\overline{X}$, σ на $\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Отримаємо

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t),$$

де

$$t=\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Враховуючи, що імовірність P задана і дорівнює γ, отримуємо формулу

$$P(\bar{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t)=\gamma.$$

Отже, з надійністю γ довірчий інтервал $(\bar{x}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ покриває невідомий параметр a; при цьому точність оцінки

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}.$$

<u>Заув.</u> Число t визначається із рівняння $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}$. За таблицями функції Лапласа знаходять аргумент t, якому відповідає значення функції Лапласа, яке дорівнює $\frac{\gamma}{2}$.

Приклад.

Випадкова величина має нормальний закон розподілу, $\sigma=3$. Знайти довірчий інтервал для оцінки невідомого математичного сподівання по вибірковому середньому, яке дорівнює 4, якщо об'єм вибірки дорівнює 25, а надійність $\gamma=$ 0,95.

За умовою:

$$2\Phi(t)=\gamma=0{,}95.$$
$$\Phi(t)=\frac{0{,}95}{2}=0{,}475,$$
$$t=1{,}96.$$

Обчислюємо:

$$\delta=\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot3}{\sqrt{25}}=1{,}18.$$

Отримали шуканий довірчий інтервал

$$2{,}92<a<5{,}18.$$

<u>Заув.</u> Оцінку $|\bar{x}-a|<t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ наз. класичною. Із формули $\delta=t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, яка визначає точність класичної оцінки, можна зробити висновок:

- при зростанні об'єма вибірки n число δ спадає, отже, точність оцінки зростає;
- збільшення надійності оцінки $\gamma=2\Phi(t)$ веде до збільшення аргумента t, а значить і до збільшення δ, тобто, збільшення надійності класичної оцінки веде до зменшення її точності.

5. Довірчий інтервал для оцінки середнього-квадратичного відхилення нормального розподілу.

Можна довести, що довірчий інтервал для оцінки невідомої дисперсії нормального розподілу з надійністю γ має вигляд:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < D < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2},$$

де: S – виправлена дисперсія,

χ_2^2, χ_1^2 – значення розподілу χ^2, які знаходяться з використанням рівнянь

$$P\left(\chi^2(k) > \chi_1^2(p,k)\right) = p, \quad p = \frac{1+\gamma}{2};$$

$$P\left(\chi^2(k) > \chi_2^2(p,k)\right) = p, \quad p = \frac{1-\gamma}{2},$$

$k=n-1$ – число ступенів вільності розподілу χ^2.

Отже, довірчий інтервал для оцінки невідомого генерального середнього-квадратичного відхилення нормального розподілу з надійністю γ має вигляд:

$$\frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_2} < \sigma < \frac{S\sqrt{n-1}}{\chi_1}.$$

Приклад.

Кількісна ознака X об'єктів генеральної сукупності має нормальний закон розподілу. Із надійністю $\gamma = 0{,}98$ знайти довірчий інтервал для невідомого генерального середнього-квадратичного відхилення σ, якщо відомо, що виправлена вибіркова дисперсія дорівнює 4,6, а обсяг вибірки – 26.

Обчислюємо:

$$P\left(\chi^2 > \chi_1^2\right) = \frac{1+\gamma}{2} = \frac{1+0{,}98}{2} = 0{,}99,$$

$$P\left(\chi^2 > \chi_2^2\right) = \frac{1-\gamma}{2} = \frac{1-0{,}98}{2} = 0{,}01.$$

Число спупенів вільності $k = n-1 = 26-1 = 25$.

За таблицею значень розподілу χ^2 знаходимо:

$$\chi_1^2(0{,}99; k=25) = 11{,}52, \quad \chi_2^2(0{,}01; k=25) = 44{,}31.$$

Обчислюємо:

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} = \frac{25\cdot 4{,}6}{44{,}31} = 2{,}6, \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2} = \frac{25\cdot 4{,}6}{11{,}52} = 9{,}98.$$

Звідки отримуємо шуканий довірчий інтервал

$$\sqrt{2{,}6} < \sigma < \sqrt{9{,}98}$$

$$1{,}6 < \sigma < 3{,}16.$$

6.Мінімальний обсяг вибірки.

Перед утворенням вибіркової сукупності необхідно з'ясувати, яким повинен бути її обсяг вибірки.

Наступні формули визначають мінімальні обсяги вибірки при оцінюванні невідомих:

1) *генеральної середньої*

для повторної вибірки

$$n = \frac{t^2 D}{\Delta^2},$$

для безповторної вибірки

$$n' = \frac{nN}{\Delta^2};$$

2) *генеральної частки*

для повторної вибірки

$$n = \frac{t^2 pq}{\Delta^2},$$

для безповторної вибірки

$$n' = \frac{nN}{n+N}.$$

Приклад.

Визначити, якими повинні бути обсяги повторної і безповторної вибірок, щоб з імовірністю 0,95 частка деталей другого сорту в партії із 10000 деталей відрізнялась від частки у вибірці не більше, ніж на 0,03 за абсолютною величиною, якщо деталей другого сорту не більше 5%.

Маємо:

$$t = 1{,}96; \ \Delta = 0{,}03; \ p = 0{,}05; \ q = 0{,}95/$$

Тоді за формулою для повторної вибірки

$$n = \frac{t^2 pq}{\Delta^2} = \frac{1{,}96^2 \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}95}{0{,}03^2} \approx 203.$$

Для безповторної вибірки маємо

$$n' = \frac{nN}{n+N} = \frac{203\cdot 10000}{203+10000} \approx 199.$$

Тема 16. Статистична перевірка статистичних гіпотез.

1. Статистичні гіпотези.
2. Помилки I та II роду.
3. Статистичний критерій перевірки гіпотез.
4. Область прийняття гипотези.
5. Критерій згоди Пірсона.

1.Статистичні гіпотези.

Озн. *Статистичною гіпотезою* наз. будь-який вислів про генеральну сукупність, який перевіряється через вибірку.

Статистичні гіпотези ділять на дві групи:

- гіпотези про закон розподілу генеральної сукупності;
- гіпотези про параметри відомого розподілу генеральної сукупності.

Приклад. Висувається гіпотеза: генеральна сукупність має нормальний розподіл.

Озн. *Простою* наз. статистична гіпотеза, яка містить тільки одне припущення.

Як правило, це гіпотези про окремі параметри ознак генеральної сукупності, в яких параметри дорівнюють конкретним числам.

Озн. *Складною* наз. гіпотеза, яка складається із скінченного або нескінченного числа простих гіпотез.

Це можуть бути гіпотези про значення параметрів генеральної сукупності, що належать певній області імовірних значень.

Озн. *Нульовою (основною)* наз. висунута гіпотеза.

Озн. *Конкуруючою (альтернативною)* наз. гіпотеза, яка суперечить нульовій.

2.Помилки I та II роду.

Висунута гіпотеза може бути як вірною, так і хибною. Для перевірки її правильності використовують статистичні дані і статистичні методи, тому перевірку наз. *статистичною.*

Оскільки висновок про правильність гіпотези робиться за результатами скінченної вибірки, то завжди існує ризик прийняти хибне рішення. При цьому в результаті перевірки можуть бути допущені помилки двох родів.

Помилка першого роду: відхилена правильна гіпотеза.

Помилка другого роду: прийнята неправильна гіпотеза.

Вірне рішення може бути прийняте також в двох випадках:

- гіпотеза приймається і вона дійсно правильна,
- гіпотеза відхиляється і вона дійсно невірна.

Озн. *Рівнем значущості* наз. імовірність похибки першого роду.

Позначається: α.

<u>Заув.</u> Найчастіше рівень значущості приймає значення 0,01 або 0,05.

3.Статистичний критерій перевірки гіпотез.

Для перевірки нульової гіпотези використовують спеціально підібрану випадкову величину, точний або наближений розподіл якої відомий.

Озн. *Статистичним критерієм* (статистикою) наз. випадкова величина K, яка використовується для перевірки нульової гіпотези і закон розподілу якої відомий.

Для кожного конкретного випадку величина K спеціально підбирається і може позначатися різними літерами: U або Z для нормального розподілу, F або ν^2 для закону Фішера-Спедокора, K – для закону Колмогорова і т.д.

Для перевірки гіпотези за даними вибірки обчислюють частинні значення величин, які входять у критерій, чим отримують спостерігаєме значення критерія.

Озн. *Спостерігаємим значенням критерія $K_{спост.}$* наз. значення критерія, обчислене за даними вибірки.

4.Область прийняття гипотези.

Після того, як вибрали критерій перевірки гіпотези, множину усіх його можливих значень розбивають на дві підмножини, які не перетинаються. Одна із цих підмножин містить усі значення критерія, при яких нульова гіпотеза відхиляється; друга – при яких вона приймається.

Озн. *Критичною областю* наз. сукупність значень критерія, при яких нульову гіпотезу відхиляють.

Озн. *Областю прийняття гіпотези* (*областю допустимих значень*) наз. сукупність значень критерія, при яких гіпотезу приймають.

<u>Заув.</u> Критична область і область прийняття гіпотези – це інтервали, які розділяються *критичою точкою.*

Основний принцип перевірки статистичної гіпотези:

якщо спостерігаєме значення критерія належить критичній області – гіпотезу відхиляють; якщо спостерігаєме значення критерія належить області прийняття гіпотези – гіпотезу приймають.

5.Критерій Пірсона.

Озн. *Критерієм згоди* наз. критерій перевірки гіпотези про покладаємий закон невідомого розподілу .

Відомі критерії згоди: Пірсона, Колмогорова, Смірнова та інші.

Критерій згоди Пірсона не доводить справедливість гіпотези, а тільки на прийнятому рівні значущості, встановнює її згідність або не згідність з даними спостережень.

За критерієм Пірсона перевіряють гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності. З цією метою використовують:

емпірічні частоти – спостерігаємі частоти,

теоретичні частоти – частоти, обчислені у зв'язку з гіпотезою про нормальний розподіл.

Алгоритм критерія Пірсона.

Нехай із генеральної сукупності взято вибірку і складено її статистичний закон розподілу

x_i	x_1	x_2	…	x_s
n_i	n_1	n_2	…	n_s

Для того, щоб при заданому рівні значущості, перевірити нульову гіпотезу про нормальний закон розподілу генеральної сукупності, потрібно:

1) Обчислити теоретичні частоти n'_i.
2) Обчислити спостерігаєме значення критерія
$$\chi^2_{\text{сп}} = \sum \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$
3) За таблицею критичних точок розподілу χ^2, за заданим рівнем значущості α та числом степеней свободи $k = s - 3$ знайти критичну точку
$$\chi^2_{\text{кр}}(\alpha; k).$$
4) Якщо $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – немає підстав відхиляти нульову гіпотезу, тому її приймають.
Якщо $\chi^2_{\text{сп}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – нульову гіпотезу відхиляють.

__Заув.__ Об'єм вибірки повинен бути достатньо великим, не менше 50.

Приклад.
При рівні значущості 0,05 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпірічні і теоретичні частоти

емпірічні	6	13	38	74	106	85	30	14
теоретичні	3	14	42	82	99	76	37	13

Обчислимо спостерігаєме значення критерія $\chi^2_{\text{сп}}$. Для цього складаємо розрахункову таблицю:

№	n_i	n'_i	$n_i - n'_i$	$(n_i - n'_i)^2$	$\frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}$
1	6	3	3	9	3
2	13	14	-1	1	0,07
3	38	42	-4	16	0,38
4	74	82	-8	64	0,78
5	106	99	7	49	0,49
6	85	76	9	81	1,07
7	30	37	-7	49	1,32
8	14	13	1	1	0,08
$\sum$	366	366			7,19=$\chi^2_{\text{сп}}$

Обчислюємо кількість степеней свободи $k = s - 3 = 8 - 3 = 5$.
За таблицею розподілу χ^2 шукаємо $\chi^2_{\text{кр}}(\alpha, k) = 11{,}1$.
Отримали, що $\chi^2_{\text{сп}} < \chi^2_{\text{кр}}$ – значить гіпотеза приймається.

Правило пошуку теоретичних частот.

1. Весь інтервал спостерігаємих значень вибірки об'єма n ділять на s частинних інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ однакової довжини.
2. Знаходять середини отриманих частинних інтервалів:
$$x^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}.$$

В якості частоти n_i варіанти x_i^* приймають кількість варіант, які попали в i-тий інтервал. Отримують послідовність рівновіддалених варіант і їм відповідні частоти:

x_i^*	x_1^*	x_2^*	…	x_s^*
n_i	n_1	n_2	…	n_s

3. Обчислюють вибіркову середню $\overline{x^*}$ та вибіркове середнє-квадратичне відхилення σ^*.
4. Переходять до величини
$$Z = \frac{X - \overline{x^*}}{\sigma^*}.$$

і обчислюють кінці інтервалів (z_i, z_{i+1})

$$z_i = \frac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}, \quad z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}.$$

Найменше значення z_1, покладають рівним "$-\infty$", а найбільше z_s – "$+\infty$".

5. Обчислюють теоретичні імовірності p_i попадання X в інтервал (x_i, x_{i+1}) за рівнянням
$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i).$$
6. Знаходять теоретичні частоти
$$n'_i = np_i.$$

Приклад.
Знайти теоретичні частоти по заданному розподілу вибірки:

$x_i - x_{i+1}$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

1. Знаходимо середини інтервалів:

$x^*_i - x^*_{i+1}$	5	7	9	11	13	15	17	19	21
n_i	15	26	25	30	26	21	24	20	13

2. Знаходимо $\overline{x^*} = 12{,}63$ та $\overline{\sigma^*} = 4{,}695$.

3. Знаходимо (z_i, z_{i+1}). Для цього складаємо розрахункову таблицю:

№	x_i	x_{i+1}	$x_i - \overline{x^*}$	$x_{i+1} - \overline{x^*}$	$z_i = \dfrac{x_i - \overline{x^*}}{\sigma^*}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \overline{x^*}}{\sigma^*}$
1	4	6	-	-6,63	$-\infty$	-1,41
2	6	8	-6,63	-4,63	-1,41	-0,99
3	8	10	-4,63	-2,63	-0,99	-0,56
4	10	12	-2,63	-0,63	-0,156	-0,13
5	12	14	-0,63	1,37	-0,13	0,29
6	14	16	1,37	3,37	0,29	0,72
7	16	18	3,37	5,37	0,72	1,14
8	18	20	5,37	7,37	1,14	1,57
9	20	22	7,37	-	1,57	∞

4. Знаходимо теоретичні імовірності та теоретичні частоти. Для цього складаємо розрахункову таблицю:

№	z_i	z_{i+1}	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i=\Phi_{i+1}-\Phi_i$	$n'_i=np_i$
1	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3389	0,0818	16,36
3	-0,99	-0,56	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	-0,56	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,16
5	-0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
					$\sum=1$	$\sum=200$

Шукані теоретичні частоти містяться в останньому стовпці таблиці.

Тема 17. Елементи теорії кореляції.

1. Кореляційна залежність.
2. Основні задачі теорії кореляції.
3. Кореляційна таблиця.
4. Рівняння прямої лінії регресії.
5. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості.

1.Кореляційна залежність.

Дві випадкові величини можуть бути або незалежними, або пов'язані функціональною залежністю, або залежністю, яка наз. *стохастичною*.

Функціональна залежність зустрічається досить рідко, тому що обидві випадкові величини або одна із них залежать від багатьох випадкових факторів. На практиці часто доводиться вивчати випадкові величини, для яких зміна можливих значень однієї величини веде до зміни розподілу іншої.

Озн. *Стохастичною* наз. залежність, при якій зміна можливих значень однієї з величин веде до зміни розподілу іншої.

Заув. Стохастичний зв'язок виникає тоді, коли на обидві випадкові величини впливають випадкові фактори, серед яких є спільні.

Озн. *Кореляційною* наз залежність, при якій зміна однієї з величин веде до зміни середнього значення іншої.

Приклад. Залежність врожайності зерна від кількості внесених добрив.

З однакових по площі ділянок при однаковій кількості внесених добрив збирають різні врожаї. Але досвід показує, що середній врожай зерна є функцією від кількості добрив. Отже, врожайність зерна пов'язана з кількістю внесених добрив кореляційною залежністю.

Озн. *Умовним середнім* $\overline{y}_x$ наз. середнє арифметичне значень Y, які відповідають значенню $X=x$.

Якщо кожному значенню x відповідає одне значення умовної середньої, то умовна середня є функцією від x. Тоді кажуть, що випадкова величина Y залежить від X кореляційно.

Озн. *Кореляційною залежністю Y від X* наз.функціональну залежність умовної середньої від x:

$$\overline{y_x} = f(x).$$

Записане рівняння наз. *рівнянням регресії Y на X*; функцію $f(x)$ наз. *регресією Y на X*; графік цієї функції наз. *лінією регресії Y на X*.

Заув. Аналогічно визначається умовна середня $\overline{x}_y$, і кореляційна залежність X від Y.

2.Основні задачі теорії кореляції.

Теорія кореляції розглядає дві основні задачі:

Перша задача теорії кореляції *– встановлення форми кореляційного зв'язку.*
Тобто встановлення виду функції регресії. Якщо обидві функції регресії лінійні (Y на X; X на Y), то кореляцію наз. *лінійною*, в протилежному випадку – *нелінійною*. При лінійній кореляції обидві лінії регресії є прямими лініями.

Друга задача теорії кореляції *– оцінка сили кореляційного зв'язку.*

Сила кореляційного зв'язку оцінюється по величині розсіювання значень Y навколо умовної середньої $\overline{y_x}$. Велике розсіювання говорить про слабку залежність або про її відсутність. Мале розсіювання показує достатньо сильну залежність.

Озн. *Кореляційним аналізом* наз. сукупність методів оцінки кореляційних характеристик і перевірка статистичних гіпотез про них за даними вибірки.

В кореляційному аналізі застосовують наступні основні методи:

1) побудова кореляційного поля і складання кореляційної таблиці;
2) знаходження вибіркового коефіцієнта кореляції;
3) перевірка статистичних гіпотез про істотність зв'язку.

Озн. *Кореляційним полем* або *діаграмою розсіювання* наз. сукупність точок, побудована в прямокутній системі координат, що відповідає заданій послідовності пар чисел $(x_i; y_i)$

3.Кореляційна таблиця.

При великій кількості спостережень одне і те саме значення x може зустрічатися n_x раз, одне й те саме значення y може зустрічатися n_y раз, а одна і та сама пара чисел $(x; y)$ може зустрічатися n_{xy} раз. Тому дані спостережень групують, після чого записують їх у вигляді таблиці, яку наз. *кореляційною*.

Приклад. Дані спостережень записані таблицею:

Y/X	10	20	30	40	n_y
0,4	5	-	7	14	26
0,6	-	2	6	4	12
0,8	3	19	-	-	22
n_x	8	21	13	18	$60 = n$

4.Рівняння прямої лінії регресії.

Нехай X і Y пов'язані лінійною кореляційною залежністю. Отже, обидві лінії регресії є прямими.

Нехай, щоб знайти рівняння цих прямих проведено n незалежних випробувань, в результаті яких отримано n пар чисел (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n).

Спостерігаємі пари чисел можна розглядати, як випадкову вибірку із генеральної сукупності всіх можливих значень випадкової величини $(X; Y)$.

Знайдемо вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X.

Спочатку розглянемо найпростіший випадок: коли різні значення x ознаки X і відповідні їм значення y ознаки Y спостерігаються по одному разу.

Шукане рівняння прямої має вигляд

$$\overline{y_x} = kx + b.$$

Озн. Кутовий коефіцієнт k прямої лінії регресії Y на X наз. *вибірковим коефіцієнтом регресії*.

Позначається ρ_{yx}.

Отже, рівняння прямої лінії регресії має вигляд:

$$\overline{y_x} = \rho_{yx} x + b.$$

Задача полягає в тому, що треба підібрати параметри ρ_{yx} і b так, щоб точки (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), побудовані на площині xOy, як можливо блище знаходилися біля прямої лінії регресії. Тобто, сума квадратів відхилень повинна бути мінімальною.

Позначимо:

$\overline{Y_i} - y_i \quad (i = \overline{1, n})$ – відхилення;

$\overline{Y_i}$ – ордината, що відповідає x_i і обчислена за рівнянням прямої лінії регресії;

y_i – спостерігаєма ордината, яка відповідіє x_i.

Кожне із відхилень залежить від обох параметрів. Отже, сума відхилень також залежить від цих параметрів ρ_{yx} і b . Тобто сума відхилень – це функція від ρ_{yx} і b.

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_1^n (\overline{Y_i} - y_i)^2.$$

Або

$$F(\rho_{yx}, b) = \sum_1^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i)^2.$$

Необхідно знайти мінімум функції $F(\rho, b)$. Для цього знаходимо частинні похідні і прирівнюємо їх до нуля. Отримуємо систему рівнянь:

$$F_\rho'(\rho_{yx}, b) = 2\sum_1^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i) x_i = 0;$$

$$F_b'(\rho_{yx}, b) = 2\sum_1^n (\rho_{yx} x_i + b - y_i) = 0$$

Виконавши перетворення отримаємо систему:

$$\rho_{yx} \sum_1^n x_i^2 + b \sum_1^n x_i = \sum_1^n x_i y_i;$$

$$\rho_{yx} \sum_1^n x_i + nb = \sum_1^n y_i.$$

Розв'язавши систему, отримаємо невідомі параметри:

$$\rho_{yx} = \frac{n\sum_1^n x_i y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2};$$

$$b_{yx} = \frac{\sum_1^n x_i^2 \sum_1^n y_i - \sum_1^n x_i \sum_1^n x_i y_i}{n\sum_1^n x_i^2 - \left(\sum_1^n x_i\right)^2}.$$

Заув. Аналогічно можна знайти вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y.

Приклад. Знайти рівняння прямої лінії регресії за даними спостережень:

X	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
Y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Складаємо розрахункову таблицю:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1,00	1,25	1,00	1,250
1,50	1,40	2,25	2,100
3,00	1,50	9,00	4,500
4,50	1,75	20,25	4,875
5,00	2,25	25,00	11,250
$\sum x_i=15$	$\sum y_i=8,15$	$\sum x_i^2=57,50$	$\sum x_i y_i=26,975$

Шукаємо невідомі параметри із рівняння прямої лінії регресії:

$$\rho_{yx}=\frac{5\cdot 26,975-15\cdot 8,15}{5\cdot 57,5-15^2}=0,202,$$

$$b=\frac{57,5\cdot 8,15-15\cdot 26,975}{62,5}=1,024.$$

Записуємо шукане рівняння:

$$\overline{y}_x=0,202\,x+1,024.$$

5.Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості.

Для визначення невідомих параметрів рівняння прямої лінії регресії ми покладали, що значення X і їм відповідні значення Y спостерігаються по одному разу. Припустимо, що отримано більше даних і вони згруповані. Запишемо систему

$$F'_{\rho}(\rho_{yx}, b)=0;$$
$$F'_{b}(\rho_{yx}, b)=0$$

так, щоб вона відображала нові дані. Для цього використаємо тотожності:

$$\overline{x}=\frac{\sum_{1}^{k}x_i}{n} \quad\Rightarrow\quad \sum_{1}^{k}x_i=k\overline{x};$$

$$\overline{y}=\frac{\sum_{1}^{m}y_i}{n} \quad\Rightarrow\quad \sum_{1}^{m}y_i=m\overline{y};$$

$$\overline{x^2}=\frac{\sum_{1}^{k}x_i^2}{n} \quad\Rightarrow\quad \sum_{1}^{k}x_i^2=k\overline{x^2};$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}x_i y_j \quad\Rightarrow\quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{xy}x_i y_j$$

враховуючи те, що пара $(x; y)$ спостерігається n_{xy} раз і $\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{ij}=n$.

Підставляємо в раніше записану систему, отримаємо:

$$(n\overline{x^2})\rho_{yx}+(n\overline{x})b=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{xy}x_i y_j;$$

$$(\overline{x})\rho_{yx}+b=\overline{y}.$$

Розв'язавши систему, знайдемо параметр ρ_{yx} і b. Отримаємо:

$$\rho_{yx}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{xy}x_i y_j-n\overline{x}\overline{y}}{n(\overline{x^2}-(\overline{x})^2)}.$$

Запишемо рівняння прямої лінії регресії в іншому вигляді. Із другого рівняння системи виражаємо b, отримаємо:

$$b=\overline{y}-\rho_{yx}\overline{x}.$$

Підставляємо отриманий для b вираз в рівняння прямої лінії регресії:

$$\overline{y}_x-\overline{y}=\rho_{yx}(x-\overline{x}).$$

Записуємо вираз для параметра ρ_{yx} із врахуванням того, що $\overline{x^2}-(\overline{x})^2=\sigma_x^2$:

$$\rho_{yx}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{xy}x_i y_j-n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x^2}.$$

Домножаємо обидві частини рівняння на дріб $\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$:

$$\rho_{yx}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{xy}x_i y_j-n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}.$$

Позначимо:

$$r_B=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}n_{xy}x_i y_j-n\overline{x}\overline{y}}{n\sigma_x\sigma_y}$$ – *вибірковий коефіцієнт кореляції.*

Тут: x, y – варіанти ознак X, Y,
n_{xy} – частота спостерігаємої пари $(x; y)$;
n – об'єм вибірки;
σ_x, σ_y – вибіркові середні-квадратичні відхилення.

Тоді:

$$\rho_{yx}=r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.$$

Отже, рівняння прямої лінії регресії записане через вибірковий коефіцієнт кореляції має вигляд:

$$\overline{y}_x-\overline{y}=r_B\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$$

Заув. Аналогічно отримують рівняння прямої лінії регресії X на Y, записане через вибірковий коефіцієнт кореляції.

Заув. 1. Абсолютна величина вибіркового коефіцієнта кореляції не перевищує 1.

$|r_B|\le 1$

2. Вибірковий коефіцієнт кореляції характеризує силу лінійного кореляційного зв'язку між кількісними ознаками у вибірці. Чим блище по абсолютній величині вибірковий коефіцієнт кореляції до 1, тим зв'язок сильніший; чим блище – до 0, тим зв'язок слабший.

Приклад. Встановити силу кореляційного зв'язку, якщо відомі результати спостережень

x	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
y	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Встановимо тепер силу кореляційного зв'язку. Для цього спочатку проводимо додаткові обчислення:

$$\bar{x}=\frac{1{,}00+1{,}50+3{,}00+4{,}50+5{,}00}{5}=3,$$

$$\bar{y}=\frac{1{,}25+1{,}40+1{,}50+1{,}75+2{,}25}{5}=1{,}63$$

Обчислимо середні квадратичні відхилення:

$$\overline{x^2}=\frac{1{,}00^2+1{,}50^2+3{,}00^2+4{,}50^2+5{,}00^2}{5}=11{,}5,$$

$$\overline{y^2}=\frac{1{,}25^2+1{,}40^2+1{,}50^2+1{,}75^2+2{,}25^2}{5}=2{,}7795,$$

Тоді

$$\sigma_x=\sqrt{11{,}5-3^2}=1{,}58$$

$$\sigma_y=\sqrt{2{,}7795-1{,}63^2}=0{,}356.$$

Отримані результати підставляємо у формулу для обчислення вибіркового коефіцієнта кореляції:

$$r_B=\frac{26{,}975-5\cdot 3\cdot 1{,}63}{5\cdot 1{,}58\cdot 0{,}356}=0{,}898.$$

Вибірковий коефіцієнт кореляції близький до одиницы, отже, кореляційний зв'язок є тисним.

<u>Заув.</u> Якщо дані спостережень задані кореляційною таблицею з рівновіддаленими варіантами, то доцільно перейти до умовних варіан:

$$u_i=\frac{x_i-C_1}{h_1},\quad v_i=\frac{y_i-C_2}{h_2},$$

де:

C_1 – початок нового відрахупку варіант X (хибний ноль), в якості якого приймають варіанту, що знаходиться в середині варіаційного ряду (як правило це варіанта, яка має найбільшу частоту),

C_2 – початок нового відрахунку варіант Y,

h_1 – різниця між сусідніми варіантами X,

h_2 – різниця між сусідніми варіантами Y.

В такому випадку вибірковий коефіціен кореляції визначається за формулою:

$$r_B=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m} n_{uv}u_i v_j-n\bar{u}\bar{v}}{n\sigma_u\sigma_v}.$$

Приклад.

Знайти вібіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними, наведеними в таблиці:

Y	X					n_y
	20	25	30	35	40	
16	4	6	-	-	-	10
26	-	8	10	-	-	18
36	-	-	32	3	9	44
46	-	-	4	12	6	22
56	-	-	-	1	5	6
n_x	4	14	46	16	20	n=100

Складаємо кореляційну таблицю в умовних варіантах. За хибні нулі вибираємо $C_1 = 30$ та $C_2 = 36$:

V	U					n_u
	-2	-1	0	1	2	
-2	4	6	-	-	-	10
-1	-	8	10	-	-	18
0	-	-	32	3	9	44
1	-	-	4	12	6	22
2	-	-	-	1	5	6
n_v	4	14	46	16	20	n=100

Знаходимо $\bar{u}$, $\bar{v}$:

$$\bar{u}=\frac{\sum_{i=1}^{5}u_i n_{u_i}}{n}=\frac{-24-1\cdot 14+0\cdot 46+1\cdot 16+2\cdot 20}{100}=0{,}34,$$

$$\bar{v}=\frac{\sum_{j=1}^{5}v_j n_{v_j}}{n}=\frac{-2\cdot 10-1\cdot 18+0\cdot 44+1\cdot 22+2\cdot 6}{100}=-0{,}04.$$

Знаходимо допоміжні величини $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$:

$$\overline{u^2}=\frac{\sum_{i=1}^{5}u_i^2 n_{u_i}}{n}=\frac{(-2)^2\cdot 4+(-1)^2\cdot 14+0^2\cdot 46+1^2\cdot 16+2^2\cdot 20}{100}=1{,}26;$$

$$\overline{v^2}=\frac{\sum_{j=1}^{5}v_j^2 n_{v_j}}{n}=\frac{(-2)^2\cdot 10+(-1)^2\cdot 18+0^2\cdot 44+1^2\cdot 22+2^2\cdot 6}{100}=1{,}04.$$

Обчислюємо σ_u, σ_v:

$$\sigma_u = \sqrt{\overline{u^2} - \left(\overline{u}\right)^2} = \sqrt{1{,}26 - 0{,}34^2} = 1{,}07\,,$$

$$\sigma_v = \sqrt{\overline{v^2} - \left(\overline{v}\right)^2} = \sqrt{1{,}04 - 0{,}04^2} = 1{,}02\,.$$

Знаходимо $\sum\limits_{i=1}^{5}\sum\limits_{j=1}^{5} n_{uv}u_i v_j$, для чого складаємо розрахункову таблицю:

V	U					$U=\sum n_{uv}u$	vU
	-2	-1	0	1	2		
-2	-8 4 -8	-6 6 -12	-	-	-	14	28
-1	-	-8 8 -8	0 10 -10	-	-	-8	8
0	-	-	0 32 0	3 3 0	18 9 0	21	0
1	-	-	0 4 4	12 12 12	12 6 6	24	24
2	-	-	-	1 1 2	10 5 10	11	22
$V=\sum n_{uv}v$	-8	-20	-6	14	16		$\sum\limits_{v} vU = 82$
UV	16	20	0	14	32	$\sum\limits_{u} uV = 82$	

Знаходимо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{m} n_{uv}u_i v_j - n\overline{u}\overline{v}}{n\sigma_u\sigma_v} = \frac{82 - 100\cdot 0{,}34\cdot(-0{,}04)}{100\cdot 1{,}07\cdot 1{,}02} = 0{,}76.$$

Тема 18. Елементи регресійного аналізу.

1. Основні задачі регресійного аналізу.
2. Парна лінійна регресія.
3. Множинна лінійна регресія.

1.Основні задачі регресійного аналізу.

Для описання, аналізу, прогнозування явищ і процесів використовують математичні моделі у вигляді рівнянь або функцій. Результат впливу одного або кількох результуючих показників можна представляти у вигляді функції від впливаючих факторів. Як правило, суттєвих факторів небагато, а несуттєвих – достатньо велика кількість, тому останніми повністю нехтувати не можна.

Раніше (тема "Елементи теорії кореляції") були визначені об'єкти: регресія, рівняння регресії, лінія регресії. Дамо тепер означення регресійного аналізу та сформулюємо його основні задачі.

Озн. *Регресійний аналіз* – це дослідження односторонніх статистичних залежностей між випадковими величинами. При цьому деякі із факторних величин можуть бути невипадковими.

Озн. *Статистичною* наз. залежність між величинами X та Y, для якої зміна спостережених значень однієї з величин зумовлює зміну умовного статистичного розподілу іншої.

Задачі регресійного аналізу.

1. Визначення форми залежності.
2. Знаходження функції регресії.
3. Побудова точкових та інтервальних оцінок параметрів функції регресії.
4. Знаходження точкових та інтервальних оцінок умовних математичних сподівань, необхідних для визначення меж, в яких із заданою надійністю будуть міститися середні значення досліджуваної величини, якщо інші пов'язані з нею величини набирають певних значень.
5. Перевірка узгодженості знайденої емпірічної функції регресії спостереженим даним.

Заув. Основна мета регресійного аналізу: теоретично обґрунтований і статистично надійний точковий та інтерваотний прогноз значень залежної величини або умовного математичного сподівання цієї величини.

2. Парна лінійна регресія.

Розглянемо найпростішу регресійну модель – парну лінійну регресію, яка схематично записується у вигляді:

$$Y = \alpha_1 x + \alpha_0 + \Delta\,,$$

де x – невипадковий фактор,

α_1 – теоретичний коефіцієнт регресії, який показує, наскільки в середньому зміниться детермінована (невипадкова) складова, якщо фактор зміниться на одиницю,

Δ – випадкова складова, що уособлює сумарну дію різних випадкових факторів, вона наз. *похибкою.* Припускаємо, що похибка є нормально розподіленою випадковою величиною з характеристиками

$$M(\Delta) = 0,\ D(\Delta) = \sigma^2\,.$$

1. Знаходження статистичних оцінок невідомих параметрів α_0,α_1.

Нехай з метою отримання статистичних оцінок $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1$ параметрів регресії α_0,α_1 проводяться вимірювання. При цьому для значень $x_1,x_2,...,x_n$ спостерігають відповідно значення $y_1,y_2,...,y_n$. В результаті отримують рівняння:

$$y_i=\alpha_1 x_i+\alpha_0+\Delta_i \qquad \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Нехай похибки Δ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ є попарно незалежними.

Статистичні оцінки $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1$ параметрів регресії α_0,α_1 вибирають таким чином, щоб емпіричні значення детермінованої складової $\hat{y}_i=\hat{a}_1 x_i+\hat{a}_0$ якомога ближче наближались до фактичних значень результуючої ознаки y_i. Оцінки, що володіють найкращими властивостями отримують за допомогою методу найменших квадратів. Згідно з методом найменших квадратів потрібно мінімізувати функцію

$$F\left(\hat{a}_1,\hat{a}_0\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{a}_1 x_i-\hat{a}_0\right)^2.$$

В результаті отримаємо систему лінійних рівнянь відносно невідомих $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1$:

$$\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\hat{a}_1+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{a}_0=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\hat{a}_1+n\,\hat{a}_0=\sum_{i=1}^{n}y_i.\end{cases}$$

Розв'язавши систему отримуємо:

$$\hat{\alpha}_1=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},$$

$$\hat{\alpha}_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i}{n}-\hat{\alpha}_1\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}.$$

__Заув.__ Отримані оцінки параметрів регресії α_0,α_1 є незміщеними і ефективними.

2.Визначення довірчих інтервалів для невідомих параметрів α_0,α_1.

В результаті розрахунків отримують довірчі інтервали для параметрів регресії α_0,α_1, а саме:

$$\hat{\alpha}_1-t(\gamma;n-2)\sigma_{\hat{\alpha}_1}<\alpha_1<\hat{\alpha}_1+t(\gamma;n-2)\sigma_{\hat{\alpha}_1},$$

де

$$\sigma_{\hat{\alpha}_1}=\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}},\quad \hat{\sigma}^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2}{n-2},$$

значення $t(\gamma;n-2)$ визначаються за таблицею розподілу Ст'юдента.

Аналогічно

$$\hat{\alpha}_0-t(\gamma;n-2)\sigma_{\hat{\alpha}_0}<\alpha_0<\hat{\alpha}_0+t(\gamma;n-2)\sigma_{\hat{\alpha}_0},$$

де

$$\sigma_{\hat{\alpha}_0}=\hat{\sigma}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}}.$$

3.Побудова довірчої зони для базисних точок.

Вважаємо, що послідовність x_i розташована в порядку зростання. Довірчий інтервал для, так званих, базисних точок має вигляд

$$\left(\hat{y}_k-\sigma_{\hat{y}_k}\,t(\gamma;n-2);\,\hat{y}_k+\sigma_{\hat{y}_k}\,t(\gamma;n-2)\right), \tag{14.2}$$

де

$$\sigma_{\hat{y}_k}=\hat{\sigma}\left\{\frac{1}{n}+\frac{\left(x_k-\bar{x}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \left(k=\overline{1,n}\right).$$

Якщо для всіх значень k $\left(k=\overline{1,n}\right)$ визначені початок і кінець інтервалу (14.2), то кожному значенню x_i ставлять у відповідність дві точки з координатами $\left(x_i,y_i^*\right)$ та $\left(x_i,y_i^{**}\right)$, де y_i^*, y_i^{**} – початок і кінець i-го довірчого інтервалу для базисних даних. Прямолінійні відрізки, які сполучають кожні дві сусідні точки утворюють *довірчу зону для базисних точок.*

4.Обчислення вибіркового коефіцієнта детермінації.

Озн. *Вибірковим коефіцієнтом детермінації* наз. відношення

$$d=\frac{\hat{S}^2}{S^2},$$

де:

$\hat{S}^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i-\bar{y}\right)^2$ – сума квадратів розрахункових відхилень від середньої арифметичної спостережених значень (частина варіації),

$S^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)^2$ – сума квадратів відхилень спостережених значень від їх середньої арифметичної (увя варіація).

Заув. 1. Вибірковий коефіцієнт детермінації обчислюють також за формулою

$$d = 1 - \frac{S_R^2}{S^2},$$

де:

$$S_R^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$$ – сума квадратів відхилень спостережених від розрахункових значень.

Взагалі

$$S^2 = \hat{S}^2 + S_R^2.$$

2. Вибірковий коефіцієнт детермінації показує наскільки добре рівняння регресії описує дану систему спостережень $\{(x_i, y_i), i = \overline{1,n}\}$. Чим ближчий він до одиниці, тим кращим є опис рівнянням регресії емпіричних даних (якщо модель є методично правильною).

Приклад.

Для підприємства, яке має велику кількість філій, отримані статистичні дані по дванадцяти філіям стосовно коефіцієнта використання основних засобів X і добового обсягу виробництва Y (тис.грн.).

I	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y_i	2,93	5,27	6,85	7,01	7,02	8,35	4,33	5,77	7,68	3,16	1,52	3,15
x_i	0,31	0,98	1,21	1,29	1,12	1,49	0,78	0,94	1,29	0,48	0,24	0,55

Знайти:

1) статистичні оцінки параметрів лінійної регресії,
2) довірчі інтервали для параметрів рівняння регресії з надійністю $\gamma = 0,95$,
3) довірчу зону для базисних точок,
4) вибірковий коефіцієнт детермінації.

Складаємо розрахункову таблицю:

№	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})y_i$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
1	0,31	2,93	0,0961	0,9083	-0,58	0,3364	-1,6994	5,3977	2,2245	0,4977
2	0,98	5,27	0,9604	5,1646	0,09	0,0081	0,4743	0,0003	5,7233	0,2055
3	1,21	6,85	1,4641	8,2885	0,32	0,1024	2,1920	2,5495	6,9243	0,0743
4	1,29	7,01	1,6641	9,0429	0,40	0,1600	2,8040	3,0860	7,3421	0,1103
5	1,12	7,02	1,2544	7,8624	0,23	0,0529	1,6146	3,1212	6,4544	0,3199
6	1,49	8,35	2,2201	12,4415	0,60	0,3600	5,0100	9,5896	8,3865	0,0013
7	0,78	4,33	0,6084	3,3774	-0,11	0,0121	-0,4763	0,8525	4,6779	0,1217
8	0,94	5,77	0,8836	5,4238	0,05	0,0025	0,2885	0,2670	5,5144	0,0653
9	1,29	7,68	1,6641	9,9072	0,40	0,1600	3,0720	5,8889	7,3421	0,1142
10	0,48	7,16	0,2304	1,5168	-0,41	0,1681	-1,2956	4,3819	3,1122	0,0023
11	0,24	1,52	0,0576	0,3648	-0,65	0,4225	-0,9880	13,9375	1,8589	0,1149
12	0,55	3,15	0,3025	1,7325	-0,34	0,1156	-1,071	4,4239	3,4778	0,1074
Σ	10,68	63,04	11,4058	66,0307		1,9006	9,9251	53,496		1,7348

1.Обчислюємо згідно формул

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{12 \cdot 66,0307 - 10,68 \cdot 63,04}{12 \cdot 11,4058 - (10,68)^2} = 5,2221,$$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - \hat{\alpha}_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{63,04}{12} - 5,2221 \cdot \frac{10,68}{12} = 0,6056.$$

Отже, емпіричне рівняння регресії має вигляд:

$$\hat{y} = 5,2221x + 0,6056.$$

2.Для побудови довірчого інтервалу для α_0 спочатку обчислюємо $\sigma_{\hat{\alpha}_0}$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-2} = \frac{1,7348}{12-2} = 0,1735,$$

$$\sigma_{\hat{\alpha}_0} = \hat{\sigma}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = 0,4165 \cdot \sqrt{\frac{11,4058}{12 \cdot 1,9006}} = 0,2945.$$

За таблицею доданків знаходимо $t(0,95;10) = 2,228$. Тоді

$$\hat{\alpha}_0 - t(\gamma; n-2)\sigma_{\hat{\alpha}_0} < \alpha_0 < \hat{\alpha}_0 + t(\gamma; n-2)\sigma_{\hat{\alpha}_0},$$

отже

$$0,6056 - 2,228 \cdot 0,2945 < \alpha_0 < 0,6056 + 2,228 \cdot 0,2945,$$

$$-0,0506 < \alpha_0 < 1,2618.$$

Аналогічно

$$\sigma_{\hat{\alpha}_1} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}} = \frac{0,4165}{\sqrt{1,9006}} = 0,3021.$$

Отже,

$$5,2221 - 2,228 \cdot 0,3021 < \alpha_1 < 5,2221 + 2,228 \cdot 0,3021,$$

$$4,5490 < \alpha_1 < 5,8952.$$

3.Для побудови довірчої зони для базисних даних обчислюємо спочатку

$$\sigma_{\hat{y}_k} = \hat{\sigma}\left\{\frac{1}{n} + \frac{(x_k - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad (k = \overline{1,n}).$$

Отримуємо:

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_1} = 0{,}4165\left\{\frac{1}{12}+\frac{0{,}3364}{1{,}9006}\right\}^{\frac{1}{2}} = 0{,}2125\,,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_2} = 0{,}1233\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_3} = 0{,}1543\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_4} = 0{,}1705\,,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_5} = 0{,}1389\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_6} = 0{,}2175\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_7} = 0{,}1247\,,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_8} = 0{,}1212\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_9} = 0{,}1705\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_{10}} = 0{,}1726\,,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{y}_{11}} = 0{,}2303\,,\quad \hat{\sigma}_{\hat{y}_{12}} = 0{,}1581\,.$$

Знаходимо довірчі інтервали (14,2). Для

$k=1$: (2,2245 – 0,2125·2,228; 2,2245+ 0,2125·2,228), або (1,7511; 2,2730),

$k=2$: (5,4486; 5,9980), $k=3$: (6,5805; 7,2681),

$k=4$: (6,9623; 7,7219), $k=5$: (6,1449; 6,7639),

$k=6$: (7,9019; 8,8711), $k=7$: (4,4001; 4,9557),

$k=8$: (5,2443; 5,7844), $k=9$: (6,9622; 7,7229),

$k=10$: (2,7277; 3,468), $k=11$: (1,3458; 2,3720),

$k=12$: 93,1256; 3,8300).

Для графічної побудови довірчої зони для базисних даних потрібно розташувати значення x_i в порядку зростання, відмітити точки з координатами (x_i, y_i^*) та (x_i, y_i^{**}), з'єднати останні прямолінійними відрізками.

4. Вибірковий коефіцієнт детермінації обчислюємо за формулою:

$$d = 1-\frac{S_R^2}{S^2} = 1-\frac{1{,}7348}{53{,}4960} = 0{,}9676\,.$$

3.Множинна лінійна регресія.

На практиці здебільшого залежна змінна y_i пов'язана з впливом не одного, а кількох аргументів. В такому разі регресію наз. *множинною*. Розглянемо множинну лінійну регресію. Для такого випадку модель має вигляд

$$y = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i + \Delta\,,$$

де:

$\alpha_i\left(i=\overline{1,k}\right)$ – коефіцієнт регресії при детермінованому факторі x_i, який показує на скільки зміниться детермінована складова, якщо x_i зміниться на одиницю,

Δ – випадкова складова, для якої виконуються усі умови описані раніше.

В матричному вигляді рівняння має вигляд:

$$Y = X\alpha + \Delta\,,$$

де:

$Y = (y_1, y_2, ..., y_n)^T$ – вектор-стовпець вибіркових значень результуючої ознаки,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix}$$ – регресійна матриця значень факторів, доповнена одиничним стовпцем, який відповідає вільному члену регресії α_0.

Елементи цієї матриці наз. *регресорами*.

$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_k)^T$ – вектор-стовпець параметрів регресії.

Якщо позначити

$\hat{\alpha} = \left(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_k\right)$ – вектор-стовпець оцінок параметрів регресії,

то

$$\hat{\alpha} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y\,.$$

Заув. Обчислення інших показників проводяться за формулами для випадку парної лінійної регресії.

Приклад.

Для підприємства, яке має велику кількість філій, добовий обсяг виробництва однієї філії y лінійно залежить від коефіцієнта використання основних засобів x_1 та від середньоденної інтенсивності праці робітників (тис. виробів за день) x_2. Для дванадцяти філій за певну добу зафіксовані такі значення показників:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y_i	20,93	5,27	6,85	7,01	7,02	8,35	4,33	5,77	7,68	3,16	1,52	3,15
X_{i1}	0,31	0,98	1,21	1,29	1,12	1,49	0,78	0,94	1,29	0,48	0,24	0,55
X_{i2}	10,24	7,51	10,81	9,89	13,72	13,92	8,54	12,36	12,27	11,01	8,25	9,31

Знайти статистичні оцінки параметрів теоретичної множинної лінійної регресії.

Статистичні оцінки параметрів $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ теоретичної множинної регресії будемо шукати за формулою

$$\hat{\alpha} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T Y\,.$$

За умовою

Y=(2,93; 5,27; 6,85; 7,01; 7,02; 8,35; 4,33; 5,77; 7,68; 3,16; 1,53; 3,15)^T,

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0{,}31 & 0{,}98 & 1{,}21 & 1{,}29 & 1{,}12 & 1{,}49 & 0{,}78 & 0{,}94 & 1{,}29 & 0{,}48 & 0{,}24 & 0{,}55 \\ 10{,}24 & 7{,}51 & 10{,}81 & 9{,}89 & 13{,}72 & 13{,}92 & 8{,}54 & 12{,}36 & 12{,}27 & 11{,}01 & 8{,}25 & 9{,}31 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X^T X = \begin{pmatrix} 12 & 10{,}68 & 127{,}83 \\ 10{,}68 & 11{,}4058 & 118{,}9728 \\ 127{,}83 & 118{,}9728 & 1410{,}1435 \end{pmatrix},$$

$$\left(X^T X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 2{,}4745128 & 0{,}1897735 & -0{,}2403264 \\ 0{,}1897735 & 0{,}7454676 & -0{,}0800976 \\ -0{,}2403264 & -0{,}0800976 & 0{,}029252 \end{pmatrix},$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 63{,}04 \\ 66{,}0307 \\ 704{,}6918 \end{pmatrix}.$$

Отже

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} -0{,}832 \\ 4{,}743 \\ 0{,}175 \end{pmatrix}.$$

Тема 19. Елементи дисперсійного аналізу.

1. Поняття дисперсійного аналізу.
2. Загальна, факторна та остаточна суми квадратів відхилень.
3. Загальна, факторна та остаточна виправлені дисперсії.
4. Порівняння декількох середніх.

1.Поняття дисперсійного аналізу.

Ряд прикладних задач потребує необхідність вивчення впливу різних якісних факторів на вивчаєму величину X. Дослідженнями такого роду займаються за допомогою апарату дисперсійного аналізу.

Приклад.

Необхідно з'ясувати який вид добрив є найбільш ефективним для отримання найбільшого врожаю.

Тут добриво є якісним фактором, а види добрив – рівнями цього фактора.

***Дисперсійний аналіз*:**

1) *застосовують*: для встановлення впливу на вивчаєму величину деякого якісного фактора F, який має p рівнів $F_1, F_2, ..., F_p$.

2)*сутність*: загальну дисперсію досліджуваємої ознаки розділяють на окремі компоненти, які обумовлені впливом певних конкретних чинників. Досліджується істотність їх впливу на ознаку.

3) *основна ідея:* порівняння "факторної дисперсії", яка виникає під впливом дії фактора, та "остаточної дисперсії", яка обумовлена випадковими причинами. Якщо різниця між дисперсіями значна, то фактор істотно впливає на вивчаєму величину.

Якщо відомо, що фактор істотно впливає на вивчаєму величину і потрібно з'ясувати, який із рівнів впливає найбільше, то проводять попарне порівняння середніх.

Озн. Дисперсійний аналіз наз. *однофакторним*, якщо досліджується вплив одного фактора на вивчаєму випадкову величину.

2.Загальна, факторна та остаточна суми квадратів відхилень.

Розглянемо випадок однофакторного дисперсійного аналізу, коли на вивчаєму величину X впливає тільки один фактор F, який має p постійних рівнів. Нехай кількість спостережень на кожному рівні однакова і дорівнює q. Нехай спостерігали $n = pq$ значень x_{ij} ознаки X, де:

i – номер випробування $\left(i = \overline{1, q}\right)$,

j – номер рівня фактора $\left(j = \overline{1, p}\right)$.

Результати спостережень запишемо таблицею:

Ступінь впливу фактора	Спостережуване значення ознаки X	Групові середні	Загальна середня
1	$x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{q1}$	$\overline{x_1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} x_{i1}}{q}$	$\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} x_{ij}}{n}$ $n = pq$
2	$x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{q2}$	$\overline{x_2} = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} x_{i2}}{q}$	
...	...	...	
p	$x_{1p}, x_{2p}, \ldots, x_{qp}$	$\overline{x_p} = \dfrac{\sum_{i=1}^{q} x_{ip}}{q}$	

Загальна середня – це середнє арифметичне групових середніх, отже, можна також записати:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p} \overline{x_i}}{p}.$$

На те, як розкидані варіанти x_{ij} навколо загальної середньої $\overline{x}$, впливає не лише зміна рівня розглядаємого фактора, а й випадкові фактори. За моделлю однофакторного дисперсійного аналізу для з'ясування впливу досліджуваного фактора вибіркова дисперсія розбивається на дві частини:

1) факторну (міжгрупову, тобто, групових середніх), зумовлену впливом досліджуваного фактора на ознаку X;
2) остаточну (внутрішньогрупову), зумовлену впливом інших випадкових факторів.

Попередньо розглянемо загальну, факторну та остаточну суми квадратів відхилень:

1) *Загальна сума квадратів відхилень* спостерігаємих значень ознаки від їх загальної середньої обчислюється за формулою:

$$S_{заг} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2.$$

2) *Факторна сума квадратів відхилень* групових середніх від загальної середньої характеризує розсіювання між групами і обчислюється за формулою:

$$S_{факт} = q\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{x_j} - \overline{x}\right)^2.$$

3) *Остаточна сума квадратів відхилень* спостерігаємих значень від їх групової середньої характеризує розсіювання всередині груп і обчислюється за формулою:

$$S_{ост} = \sum_{i=1}^{q}\left(x_{i1} - \overline{x_1}\right)^2 + \sum_{i=1}^{q}\left(x_{i2} - \overline{x_2}\right)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q}\left(x_{ip} - \overline{x_p}\right)^2.$$

Заув. 1) Неважко отримати формули більш зручні для обчислення:

$$S_{заг} = \sum_{j=1}^{p} P_j - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} R_j\right)^2}{pq},$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{p} R_j^2}{q} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} R_j\right)^2}{pq}.$$

Тут: $P_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ – сума квадратів значень ознаки на рівні F_j,

$R_j = \sum_{i=1}^{q} x_{ij}$ – сума значень ознаки на рівні F_j.

2) Для спрощення обчислень із кожного спостерігаємого значення можна відняти одне й те саме число C, яке наближенно дорівнює загальній середній. Позначимо зменшенні значення варіант через $y_{ij} = x_{ij} - C$, тоді

$$S_{заг} = \sum_{j=1}^{p} Q_j - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2}{pq},$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{p} T_j^2}{q} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2}{pq}.$$

Тут: $Q_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}^2$ – сума квадратів зменшених значень ознаки на рівні F_j,

$T_j = \sum_{i=1}^{q} y_{ij}$ – сума зменшених значень ознаки на рівні F_j.

Неоднакова кількість випробувань на різних рівнях.

Нехай на рівні F_1 проведено q_1 випробувань, на рівні F_2 – q_2 випробувань, ..., на рівні F_p – q_p випробувань. В такому випадку суму квадратів відхилень знаходять за формулою

$$S_{заг} = \left[P_1 + P_2 + \ldots + P_p\right] - \frac{\left(R_1 + R_2 + \ldots + R_p\right)^2}{n},$$

де

$P_k = \sum_{i=1}^{q_k} x_{ik}^2$ – сума квадратів спостерігаємих значень ознаки на рівні F_k,

$R_k = \sum_{i=1}^{q_k} x_{ik}$ – сума спостерігаємих значень ознаки на рівні F_k,

$n = \sum_{i=1}^{p} q_i$.

Факторна сума квадратів відхилень обчислюється за формулою:

$$S_{факт} = \left[\frac{R_1^2}{q_1} + \frac{R_2^2}{q_2} + \ldots + \frac{R_p^2}{q_p}\right] - \frac{\left(R_1 + R_2 + \ldots + R_p\right)^2}{n}.$$

Решта обчислень виконуються, як і у випадку однакового числа випробувань.

Якщо для спрощення із кожного спостерігаємого значення x_{ij} відняти одне і те саме число C і позначити різницю через $y_{ij} = x_{ij} - C$, то

$$S_{заг} = \left[Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_p\right] - \frac{\left(T_1 + T_2 + \ldots + T_p\right)^2}{n},$$

$$S_{факт} = \left[\frac{T_1^2}{q_1} + \frac{T_2^2}{q_2} + \ldots + \frac{T_p^2}{q_p}\right] - \frac{\left(T_1 + T_2 + \ldots + T_p\right)^2}{n}$$

де: $Q_k = \sum_{i=1}^{q_k} y_{ik}^2$, $T_k = \sum_{i=1}^{q_k} y_{ik}$.

Заув. Загальна сума квадратів відхилень дорівнює сумі факторної суми квадратів відхилень та остаточної суми квадратів відхилень:

$$S_{çàã} = S_{ôàêò} + S_{îñò}.$$

Приклад.

Двома приладами виконано по два виміри фізичної величини, дійсний розмір якої дорівнює *x*. Розглядаючи в якості фактора систематичну похибку *C*, а в якості його рівнів – систематичні похибки C_1, C_2 відповідно першого та другого приладів, показати, що $S_{ôàêò}$ визначається систематичними, а $S_{îñò}$ – випадковими похибками вимірювання.

Позначимо: α_1, α_2 – випадкові похибки першого та другого вимірів першим приладом;

β_1, β_2 – випадкові похибки першого та другого вимірів другим приладом.

Тоді спостерігаємі значення результатів вимірів відповідно становлять:

$$x_{11} = x + C_1 + \alpha_1, \qquad x_{21} = x + C_1 + \alpha_2,$$
$$x_{12} = x + C_1 + \beta_1, \qquad x_{22} = x + C_1 + \beta_2.$$

А середні виміри першим та другим приладами дорівнюють:

$$\overline{x_1} = x + C_1 + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) = x + C_1 + \alpha,$$

$$\overline{x_2} = x + C_2 + \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = x + C_1 + \beta.$$

Загальна середня дорівнює:

$$\overline{x} = \frac{\overline{x_1} + \overline{x_2}}{2} = x + \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Факторна сума:

$$S_{факт} = \left(\overline{x_1} - \overline{x}\right)^2 + \left(\overline{x_2} - \overline{x}\right)^2,$$

або

$$S_{факт} = \frac{(C_1 - C_2)^2}{2} + (C_1 - C_2)(\alpha - \beta) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{2}.$$

Вона головним чином визначається першим доданком, отже, виражає вплив фактора С.

Остаточна сума дорівнює:

$$S_{ост} = \left(x_{11} - \overline{x_1}\right)^2 + \left(x_{21} - \overline{x_1}\right)^2 + \left(x_{12} - \overline{x_2}\right)^2 + \left(x_{22} - \overline{x_2}\right)^2,$$

або

$$S_{ост} = \left[(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2\right] + \left[(\beta_1 - \beta)^2 + (\beta_2 - \beta)^2\right].$$

Отже, остаточна сума квадратів відхилень визначається випадковими похибками вимірів, значить, вона показує вплив випадкових причин.

3.Загальна, факторна та остаточна дисперсії.

В дисперсійному аналізі використовуються не самі суми квадратів відхилень, а дисперсії. Виправлені дисперсій є незміщеними оцінками загальної, факторної та остаточної дисперсій. Для їх визначення суми квадратів відхилень ділять на відповідну кількість степеней свободи.

Кількість степеней свободи визначається як різниця між загальною кількістю спостережень та числом рівнянь, що їх пов'язують. Отже, для:

- загальної дисперсії кількість степеней свободи становить $pq - 1$;
- факторної дисперсії кількість степеней свободи становить $(p-1)$;
- остаточної дисперсії кількість степеней свободи становить $p(q-1)$.

Отримуємо:

1) *Загальна виправлена дисперсія* обчислюється за формулою:

$$S_{заг}^{\ 2} = \frac{S_{заг}}{pq - 1} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij} - \overline{x}\right)^2}{pq - 1}.$$

2) *Факторна (міжгрупова) виправлена дисперсія* обчислюється за формулою:

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{p-1} = \frac{q\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{x_j} - \overline{x}\right)^2}{p-1}.$$

Заув. Факторна виправлена дисперсія характеризує розсіювання групових середніх $\overline{x_j}$ відносно загальної середньої $\overline{x}$, яке викликане впливом фактора на результат експеременту ознаки *X*.

3) *Остаточна (внутрішньогрупова) виправлена дисперсія* обчислюється за формулою:

$$S_{ост}^2 = \frac{S_{ост}}{p(q-1)} = \frac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij} - \overline{x_j}\right)^2}{p(q-1)}.$$

Заув. Остаточна виправлена дисперсія характеризує розсіюваннявсередині групи, зумовлене впливом випадкових факторів.

Обчислення статистичних оцінок зручно подавати в упорядкованому вигляді за [illegible]мого таблиці

Вид варіацій ознаки	Сума квадратів відхилень	Число степеней свободи	Статистичні оцінки дисперсії
Внутрішньогрупова	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij}-\overline{x_j}\right)^2$	$p(q-1)$	$S_{ocm}^2=\dfrac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij}-\overline{x_j}\right)^2}{p(q-1)}$
Міжгрупова	$q\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{x_j}-\overline{x}\right)^2$	$p-1$	$S_{факт}^2=\dfrac{q\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{x_j}-\overline{x}\right)^2}{p-1}$
Загальна	$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij}-\overline{x}\right)^2$	$pq-1$	$S_{заг}^{\ 2}=\dfrac{\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{ij}-\overline{x}\right)^2}{pq-1}$

4.Порівняння декількох середніх.

Метод дисперсійного аналізу полягає в наступному: для того щоб перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх нормальних сукупностей з однаковими дисперсіями, достатньо перевірити по критерію F Фішера-Снедекора нульову гіпотезу про рівність факторної та остаточної виправлених дисперсій. Якщо факторна виправлена дисперсія виявиться менше остаточної, то гіпотеза про рівність групових середніх є вірною. В цьому випадку немає потреби використовувати критерій F.

Приклад.

Виконано по 4 випробування на кожному з трьох рівнів. Результати задані таблицею

Номер випробування	Рівні фактора F_j		
I	F_1	F_2	F_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52
$\overline{x_j}$	54	55	47

Методом дисперсійного аналізу при рівні значущості 0,05 перевірити нульову гіпотезу про рівність групових середніх. Покладається, що вибірки узято із нормальних сукупностей з однаковими дисперсіями.

Для спрощення розрахунків від кожного спостерігаємого значення віднімаємо С=52:

$$y_{ij}=x_{ij}-52\,.$$

Складаємо розрахункову таблицю.

Номер випробування	Рівні фактора F_j						Підсумковий стовпець
i	F_1		F_2		F_3		
	y_{i1}	$y_{i1}^{\ 2}$	y_{i2}	$y_{i2}^{\ 2}$	y_{i3}	$y_{i3}^{\ 2}$	
1	-1	1	0	0	-10	100	
2	0	0	2	4	-8	64	
3	4	16	4	16	-2	4	
4	5	25	6	36	0	0	
$Q_j=\sum_{i=1}^{4}y_{ij}^2$		42		56		168	$\sum Q_j=266$
$T_j=\sum_{i=1}^{4}y_{ij}$	8		12		-20		$\sum T_j=0$
T_j^2	64		144		400		$\sum T_j^2=608$

За умовою число рівнів фактора p=3, а кількість випробувань на кожному рівні q=4. Знаходимо загальну і факторну суми квадратів відхилень:

$$S_{заг}=\sum_{j=1}^{p}Q_j-\frac{\left(\sum_{j=1}^{p}T_j\right)^2}{pq}=266-0=266\,,$$

$$S_{факт}=\sum_{j=1}^{p}\frac{T_j^2}{q}-\frac{\left(\sum_{j=1}^{p}T_j\right)^2}{pq}=\frac{608}{4}-0=152\,.$$

Тоді остаточна сума квадратів відхилень дорівнює:

$$S_{ocm}=S_{заг}-S_{факт}=266-152=114\,.$$

Знаходимо факторну і остаточну дисперсії:

$$S_{факт}^2=\frac{S_{факт}}{p-1}=\frac{152}{3-1}=76\,,$$

$$S_{ocm}^2=\frac{S_{ocm}}{p(q-1)}=\frac{114}{3(4-1)}=12{,}67\,.$$

Порівняємо факторну і остаточні дисперсії за критерієм F. Знаходимо спостерігаєме значення критерію:

$$F_{спост}=\frac{S_{факт}^2}{S_{ocm}^2}=\frac{76}{12{,}67}=6\,.$$

Число степеней свободи k_1= 2, знаменник k_2 = 9, рівень значимості α = 0,05 за таблицею критичних точок розподілу F Фішера-Снедекора знаходимо критичну точку

$$F_{кр}=(0{,}05;2;9)=4{,}26\,.$$

Отримали $F_{спост}>F_{кр}$, отже, нульову гіпотезу про рівність групових середніх відхиляємо. Тобто групові середні в цілому значно відрізняються.

Тема 20. Наближене представлення даних вимірів.

1. Наближене представлення даних вимірів.
2. Метод найменших квадратів.
3. Нормальне рівняння.
4. Наближення системою лінійно незалежних базисних функцій.
5. Наближення системою базисних ортогональних функцій.

1.Наближене представлення даних вимірів.

Нехай деяка випадкова величина має визначений закон розподілу, але з невідомим параметром ξ. Відомо, що цей параметр залежить від часу $\xi(t)$. Тобто, $\xi(t)$ – є функцією від часу. Нехай на проміжку $[t_1,t_n]$ $\xi(t)$ належить до функцій широкого класу (вона – диференційована, двічі диференційована, т.д.)

Невідому функцію $\xi(t)$ необхідно замінити наближеною функцією $\xi_n(t)$, яка являє собою функцію більш вузького, ніж $\xi(t)$ класу. Це може бути, наприклад, поліном степеня m:

$$\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m).$$

Коефіцієнти полінома потрібно підібрати таким чином, щоб функції $\xi(t)$ і $\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)$ на проміжку $[t_1,t_n]$ були близькими.

Найбільш поширеними є наступні критерії близькості розрахункового та істинного вимірів:

1) $\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)$ повинна співпадати з $\xi(t)$ в заданих точках. Цей критерій застосовується в теорії точкового інтерполювання.
2) $\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)$ при дискретних значеннях аргумента t повинна задовільняти вимогу

$$\sum_{i=1}^{n}[\xi(t_i)-\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)]^s=\sum\min$$

або, при неперервній зміні аргумента t

$$\int_{t_1}^{t_2}[\xi(t)-\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)]^s dt=I_{\min}$$

де: $[t_1,...,t_n]$ – інтервал часу,

1, 2, ..., n – множина точок, на якій необхідно забезпечити наближення,

S – степінь небажаних відхилень,

$C_0,C_1,...,C_m$ – коефіцієнти, вибором яких здійснюється мінімізація.

3) Максимальне значення модуля відхилення повинно бути зведене до мінімума завдяки вибору функції $\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)$ та її коефіцієнтів.

2.Метод найменших квадратів.

Застосуємо другий критерій. При $s=2$ він дає метод найменших квадратів (МНК). МНК найкращим чином відповідає задачі обробки експерементальних даних, до розгляду якої ми перейдемо.

Нехай дійсні значення вимірів задані на множині точок 1, 2, ..., n, а саме моментів часу $t_1,t_2,...,t_n$. Це значення:

$$\xi(t_1),\xi(t_2),...,\xi(t_n).$$

Потрібно знайти наближення функції $\xi(t)$. Знайдемо наближення степеневими поліномами, а потім поширимо отримані результати на інші класи функцій.

При точковому інтерполюванні потрібно забезпечити в заданих точках точне співпадіння $\xi(t)$ з $\xi_n(t)$. Для цього використаємо поліном степені $(n-1)$.

Заув. 1. У випадку великої кількості точок використання такого методу стає незручним по наступним причинам:

- високого степеня полінома;
- збільшення степеня з додаванням кожної наступної точки;
- в проміжках між точками точність може виявитися тим нижчою, чим вище степінь полінома.

2. При обробці реальних даних точне співпадання в заданих точках веде до відсутності ефекту згладжування. Тому при великій кількості заданих точок, в яких значення функцій повинні співпадати, степінь полінома беруть значно меншим. Але таким щоб поліном вірно відображав шукану функцію.

Загальна ідея методу найменших квадратів полягає в наступному:

в заданих точках допускається неспівпадання значень функцій $\xi(t)$ і $\xi_n(t)$, але сума квадратів відхилень в цих точках повинна бути мінімальною

$$\sum_{i=1}^{n}[\xi(t_i)-\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)]^2=\sum\min.$$

Приклад.

1. Метод найменших квадратів застосовувся при пошуці невідомих коефіцієнтів прямої лінії регресії та вибіркового коефіцієнта кореляції (тема 17).
2. Метод найменших квадратів також був використаний при отриманні статистичних оцінок $\hat{\alpha}_0,\hat{\alpha}_1$ невідомих параметрів регресії α_0,α_1 (тема 18).

Заув. Чому використовується саме сума квадратів, а не інших степенів? Непарні степені не слід використовувати тому, що відхилення можуть мати різні знаки і сумарний результат приведе до невірних висновків. А використання вищих парних степенів ускладнює пошук розв'язку задачі.

Метод найменших квадратів застосовується для:

- наближення невідомих функцій точковими, але складними функціональними залежностями;
- згладжування експерементальних даних.

3.Нормальне рівняння.

Розглянемо апроксимуючий поліном $\xi_n(t)$:

$$\xi_n(t)=C_0t^0+C_1t^1+C_2t^2+...+C_mt^m=\sum_{i=0}^{m}C_it^i,$$

якого степінь $m<n$. Необхідно підібрати коефіцієнти полінома так, щоб виконувалася вимога

$$\sum_{i=1}^{n}[\xi(t_i)-\xi_n(t,C_0,C_1,...,C_m)]^s=\sum\min$$

Вибір степеня полінома можна здійснювати :
- з урахуванням обчислювальних переваг,
- враховуючи можливість більш точного наближення в заданих точках.
- шляхом перевірки статистичних гіпотез.

Розглянемо суму квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^{n}[\xi_n(t_i,C_0,C_1,...,C_m)-\xi(t_i)]^2=\sum_{i=1}^{n}\left[C_0t^0+C_1t^1+...+C_mt^m-\xi(t_i)\right]^2=\sum\min, \quad (1)$$

де: t_i, $\xi(t_i)$ – постійні величини,

C_i – невідомі.

Зміна C_i дозволяє забезпечити виконання умови (1). Ліва частина умови (1) завжди додатня і являє собою параболоїд другого порядку.Отже, вона має один екстремум, який є мінімумом. Знайдемо цей мінімум із системи рівнянь:

$$\frac{\partial\sum}{\partial C_0}=2\sum_{1}^{n}\left[C_0t_i^0+C_1t_i^1+...+C_mt_i^m\right]t_i^0=0,$$

$$\frac{\partial\sum}{\partial C_1}=2\sum_{1}^{n}\left[C_0t_i^0+C_1t_i^1+...+C_mt_i^m\right]t_i^1=0,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{\partial\sum}{\partial C_m}=2\sum_{1}^{n}\left[C_0t_i^0+C_1t_i^1+...+C_mt_i^m\right]t_i^m=0.$$

Домножаємо рівняння системи на $\frac{1}{2}$, розкриваємо дужки, переносимо останні додатки в праві частини рівнянь. Отримаємо систему рівнянь:

$$C_0\sum_{1}^{n}t_i^0+C_1\sum_{1}^{n}t_i^1+...+C_m\sum_{1}^{n}t_i^m=\sum_{1}^{n}t_i^0\xi(t_i),$$

$$C_0\sum_{1}^{n}t_i^1+C_1\sum_{1}^{n}t_i^2+...+C_m\sum_{1}^{n}t_i^{m+1}=\sum_{1}^{n}t_i^1\xi(t_i),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$C_0\sum_{1}^{n}t_i^m+C_1\sum_{1}^{n}t_i^{1+m}+...+C_m\sum_{1}^{n}t_i^{2m}=\sum_{1}^{n}t_i^m\xi(t_i).$$

Отримана квадратна система m лінійних рівнянь з m невідомими наз. *системою нормальних рівнянь*. Розв'язавши її знаходять невідомі коефіцієнти полінома, який забезпечує виконання умови (1).

Заув. Якщо шукати мінімум відхилення вищого степеня (четвертого, шостого і т.д.), то отримати систему лінійних рівнянь не вдається.

Якщо дані спостережень представлені неперервною послідовністю своїх значень, то мінімізацію суми було б доцільно замінити мінімізацією інтеграла квадрату відхилення. В такому випадку отримують систему нормальних рівнянь виду:

$$C_0\int_{t_1}^{t_n}t^0dt+C_1\int_{t_1}^{t_n}t^1dt+...+C_m\int_{t_1}^{t_n}t^mdt=\int_{t_1}^{t_n}t^0\xi(t)dt,$$

$$C_0\int_{t_1}^{t_n}t^1dt+C_1\int_{t_1}^{t_n}t^2dt+...+C_m\int_{t_1}^{t_n}t^{m+1}dt=\int_{t_1}^{t_n}t^1\xi(t)dt,$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$C_0\int_{t_1}^{t_n}t^mdt+C_1\int_{t_1}^{t_n}t^{1+m}dt+...+C_m\int_{t_1}^{t_n}t^{2m}dt=\int_{t_1}^{t_n}t^m\xi(t)dt$$

Тут усі інтеграли, що стоять в лівій частині рівнянь є табличними. Труднощі виникають при обчисленні правих частин вірнянь.

4.Наближення системою лінійно незалежних базисних функцій.

Розглянемо наближення функції $\xi(t)$ довільним рядом незалежних базисних функцій, який можна подати вектор-функцією:

$$\varphi(t)=(\varphi_0(t),\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)).$$

Розглянемо багаточлен

$$\xi_n(t,C)=\varphi(t)C=(\varphi_0(t),\varphi_1(t),...,\varphi_m(t))\begin{pmatrix}\tilde{N}_0\\ \tilde{N}_1\\ ...\\ C_m\end{pmatrix}=\sum_{k=0}^{m}C_k\varphi_k(k).$$

Тоді умова МНК отримає вигляд

$$\sum_{i=1}^{n}[C_0\varphi_0(t_i)+C_1\varphi_1(t_i)+...+C_m\varphi_m(t_i)-\xi(t_i)]^2=\sum\min.$$

Знаходимо частинні похідні по C_k, прирівнюємо їх до нуля, отримуємо систему лінійних рівнянь:

$$C_0\sum_{1}^{n}\varphi_0(t_i)\varphi_0(t_i)+C_1\sum_{1}^{n}\varphi_0(t_i)\varphi_1(t_i)+...+C_m\sum_{1}^{n}\varphi_0(t_i)\varphi_1(t_i)=\sum_{1}^{n}\varphi_0(t_i)\xi(t_i),$$

$$C_0\sum_{1}^{n}\varphi_1(t_i)\varphi_0(t_i)+C_1\sum_{1}^{n}\varphi_1(t_i)\varphi_1(t_i)+...+C_m\sum_{1}^{n}\varphi_1(t_i)\varphi_1(t_i)=\sum_{1}^{n}\varphi_1(t_i)\xi(t_i),$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$C_0\sum_{1}^{n}\varphi_m(t_i)\varphi_0(t_i)+C_1\sum_{1}^{n}\varphi_m(t_i)\varphi_1(t_i)+...+C_m\sum_{1}^{n}\varphi_m(t_i)\varphi_1(t_i)=\sum_{1}^{n}\varphi_m(t_i)\xi(t_i).$$

Заув. Система лінійних рівнянь має єдиний розвязок, якщо визначник головної матриці відмінний від нуля. Для заданої системи визначник буде більше нуля, якщо функції $\varphi_0(t),\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)$ будуть лінійно незалежними. Функції є лінійно незалежними, якщо

$$\lambda_0\varphi_0(t)+\lambda_1\varphi_1(t)+...+\lambda_m\varphi_m(t)=0$$

при

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0 .$$

5.Наближення системою базисних ортогональних функцій.

Серед багатьох систем лінійно незалежних базисних функцій можна виділити більш вузький клас, а саме ортогональних функцій на множині точок 1, 2, ... , n або на проміжку $[t_1, t_2]$,

Нехай – це функції $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_m(t)$.

Розглянемо вектор-рядок $P_\chi^T = \left(P_\chi(t_1), P_\chi(t_2), \ldots, P_\chi(t_n)\right)$.

Властивість ортогональності на множині точок 1, 2, ..., n можна представити співвідношенням:

$$P_\chi^T P_K = \sum_{i=1}^{n} P_\chi(t_i) P_K(t_i) = \begin{cases} 0, & \chi \neq K, \\ \|P_K\|^2, & \chi = K. \end{cases}$$

Для функцій ортогональних на заданому проміжку:

$$P_\chi^T P_K = \int_{t_1}^{t_n} P_\chi(t) P_K(t) dt = \begin{cases} 0, & \chi \neq K, \\ \|P_K\|^2, & \chi = K. \end{cases}$$

Розглянемо многочлен $\xi_n(t)$. Якщо

$$\xi_n(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i \varphi_i(t) = \sum_{i=0}^{m} C_i P_i(t),$$

то система нормальних рівнянь має вигляд:

$$C_0 P_0^T P_0 + C_1 P_0^T P_1 + \ldots + C_m P_0^T P_m = P_0^T \xi ,$$

$$C_0 P_1^T P_0 + C_1 P_1^T P_1 + \ldots + C_m P_1^T P_m = P_1^T \xi ,$$

$$\ldots$$

$$C_0 P_m^T P_0 + C_1 P_m^T P_1 + \ldots + C_m P_m^T P_m = P_m^T \xi .$$

З урахуванням ортогональності в лівій чатисні цієї системи відрізняються від нуля тільки ті доданки, що розміщені на головній діагоналі. Отже, системи можна записати у виглядІ:

$$C_k P_k^T P_k = P_k^T \xi \qquad \left(k = \overline{0, m}\right).$$

<u>**Заув.**</u> Порівняно з неортогональними функціями система базисних ортогональних функцій:

1) забезпечує більш високу точність обчислення оцінок коефіцієнтів C_k;
2) виключає необхідність перестворення і повторного розв'язування систем нормальних рівнянь при зміні степеня m апроксимуючого многочлена;
3) дозволяє порівняно легко забезпечити наближення дійсної траєкторії поліномом будь-якого порядку $m \leq n-1$.

Прикладом системи базисних ортогональних функцій є тригонометричний ряд:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos mx, \sin mx .$$

Приклад.

Конденсатор, заряджений до напруги $U_0 = 100$В, розряджається через деякий опір. Залежність напруги U між обкладками конденсатора від часу t зафіксована на проміжку часу 10сек з інтервалом 1 сек. Напруги вимірюється з точністю до 5 В. Результати вимірів наведені в таблиці:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
t_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

Згідно теоретичних даних, залежність напруги від часу повинна мати вигляд:

$$U = U_0 e^{-at} .$$

За даними спостережень підібрати методом найменших квадратів значення параметра a.

За таблицею значень функції e^{-x} переконуємося, що значення e^{-x} наближається до 0,05 при $x \approx 3$. Отже, коефіцієнт a повинен мати порядок 0,3. Задамо a кілька значень, близьких до 0,3:

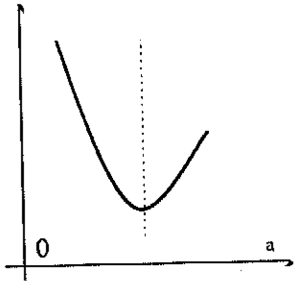
0,28; 0,29; 0,30; 0,31; 0,32; 0,33.

Обчислимо для них значення функції $U = U_0 e^{-at}$ в точках t_i. Результати подамо таблицею, останній рядок якої містить суми квадратів відхилень в залежності від a:

i	t_i	A					
		0,28	0,29	0,30	0,31	0,32	0,33
1	0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0	100,0
2	1	75,5	74,8	74,1	73,3	72,6	71,9
3	2	57,1	56,0	54,9	53,3	52,7	51,7
4	3	43,2	41,9	40,7	39,5	38,3	37,2
5	4	32,6	31,3	30,1	28,9	27,8	26,7
6	5	24,6	23,5	22,3	21,2	20,2	19,2
7	6	18,6	17,6	16,5	15,6	14,7	13,8
8	7	14,1	13,1	12,2	11,4	10,6	9,9
9	8	10,7	9,8	9,1	8,4	7,7	7,1
10	9	8,0	7,4	6,7	6,1	5,6	5,1
11	10	6,1	5,5	5,0	4,5	4,1	3,7
		83,3	40,3	17,4	13,6	25,7	51,4

З графіка функції $\sum(a)$ видно, що значення a, що відповідає мінімуму, наближенно дорівнює 0,307. Отже, за методом найменших квадратів найкращим наближенням до дослідних даних буде функція:

$$U = 100 e^{-0{,}307t}$$


0
a